EXACT SOLUTION OF THE TRANSVERSE EQUATION OF MOTION FOR MULTIBUNCHED-BEAM DYNAMICS

Yujiro OGAWA

KEK, National Laboratory for High Energy Physics
Tsukuba, Ibaraki 305, Japan

ABSTRACT

An exact solution of the transverse equation of motion for multibunched-beam dynamics which is based on the rigid macroparticle model was obtained in a general form, where the betatron wave number and the beam energy both depend on position, i.e. the independent variable of the equation, in a certain manner. The result was compared with the numerical simulation to check its validity. By using this analytical solution, we might get better understanding of transverse wake-field effects in the case of high-current beam acceleration.

マルチバンチビームに関する横方向運動方程式の厳密解

1. はじめに

リニアックにおける大電流電子ビームの加速時の一つの大きな問題として、横方向のウェーク場によるビーム不安定性の問題がある。とくに大電流マルチバンチ運転の際に、先行バンチによって生ずる横方向ウェーク場のために後続バンチのビーム軌道が中心からずれて、長距離加速中にビームが失われてしまい結果的に多くのバンチを加速できない場合がある。将来のリニアコライダー計画では、衝突のルミノシティを効率的に上げるために同一のマイクロ波パルス内でできるだけ多くのバンチを加速することを想定しているが、このような場合にマルチバンチの横方向ウェーク場による不安定性は深刻な問題の一つになっている。また、KEKの次期計画として検討されているB-ファクトリ計画では大量の陽電子ビームを必要とするが、陽電子発生のためには大電流電子ビームを変換ターゲットまで安定に加速しなければならない。現在のところシングルバンチ加速を仮定しているが、必要とされるバンチ内の電荷量が10nCに達しバンチ内の不安定性の問題も検討課題の一つとなっている。

横方向のウェーク場によるビーム不安定性については、これまでに、理論的にも実験的にもその性質は次第に明らかにされてきている[1]。不安定性の抑制策に関しても幾つかの方法が考案され、実際に運用されている例(SLC)もある [2]。しかしながら、とくに将来のリニアコライダーに要求されている高品質のビーム加速の場合は、これまでの方法がどこまで有効か再検討の余地がある。理論的には一般にRigid Macroparticleモデルによる横方向運動方程式の近似解などをもとにビームダイナミクスが検討され [3]、不安定抑制策が提案されているのが現状である。本稿では、このRigid Macroparticleモデルによる横方向運動方程式において、ある極めて現実的な条件のもとでは非常に一般的に厳密解が得られることを示す。また、それによって大電流加速の場合の最適な設計指針を得ることができるだけでなく、不安定性抑制策の有効性についても見通しの良い議論ができることを示唆したい。

2. Rigid Macroparticleモデル

リニアックにおける横方向ウェーク場の効果については、P. B. Wilson [4]がシングルバンチの場合に簡単なモデルを作って調べた。彼は、バンチ内を前後に2つにわけてこの2つの質点によってバンチの振る舞いを代表させ(Two-particleモデル)、ベータトロン振動を行なっているバンチに対する横方向ウェーク場の影響を議論した。これを多粒子系に拡張することによってシングルバンチのみならず、マルチバンチ加速の場合におけるビーム不安定性とその抑制策の議論を展開することが、現在一般的に行なわれている。ビームのエネルギー、

ベータトロン波長が一般に場所の函数である場合、多粒子系の横方向の運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{d}{ds}\left(\gamma_n(s)\frac{dx_n}{ds}\right)+\gamma_n(s)k_n^2(s)x_n=F_n(s) \qquad (1)$$
$$(n=1, N)$$

ここで右辺のウェーク場による効果は

$$F_n(s)=r_0\sum_{i=1}^{n-1}N_iW_{n-i+1}x_i(s) \qquad (2)$$

のように表される。但し、N はマクロ粒子の総数、$x_n(s)$ は加速器に沿って測った距離s における各マクロ粒子の横方向位置、$\gamma_n(s)$ はエネルギーローレンツ因子、$k_n(s)$ はベータトロン波数、r_0 は古典電子半径、N_i はi番目のマクロ粒子に含まれる電子数、W_i はあるマクロ粒子からi番目後方にあるマクロ粒子へ与える横方向ウェーク場の大きさ（各マクロ粒子の個性は含まれる電子数のみによって表されると仮定した。すなわち、各マクロ粒子の形状など、実際にはウェーク場の見積に影響を及ぼすと考えられる因子はここでは考慮しないが、ここでの計算の本質的な点は変わらない。）である。P. B. Wilsonの提唱したTwo-particleモデルでは、加速がなく、ベータトロン波数も一定な場合には容易に解析解が得られる。しかし、一般に加速があり、ベータトロン波数も場所の函数である場合には、簡単なTwo-particleモデルの場合でさえ解析解は得られていなかった。近似解としては、Adiabaticな加速の場合にWKB法を用いた例 [3]などがあるが、低エネルギー領域での評価が難しい等の問題があると思われる。したがって、もし厳密な解が得られれば、不安定性の議論のより詳細な検討が可能となると期待される。

3. 横方向運動方程式の厳密解

3.1. 仮定

運動方程式(1)を解くにあたって、以下のような仮定を置く。ベータトロン振動の位相に相当する量として

$$\phi_n'(s)=k_n(s) \quad \text{あるいは、} \phi_n(s)=\int^s k_n(s')ds' \qquad (3)$$

を考え、これが次のような関係を満たすとする。すなわちC_nをある定数として、

$$\phi_n(s)=C_nk_n(s)\gamma_n(s) \qquad (4)$$

と書けるとする。特別な場合として、初期エネルギーγ_{0n}、一様加速ゲインG_n を仮定すると、

$$\gamma_n(s)=\gamma_{0n}+G_n\cdot s \qquad (5)$$

となるが、このとき、(3)、(4)の関係から

$$k_n(s)=k_{0n}\left[\frac{\gamma_{0n}}{\gamma_n(s)}\right]^p \qquad \left(p\equiv 1-\frac{1}{C_nG_n}\right) \qquad (6)$$

$$\phi_n(s)=\frac{1}{G_n(1-p)}k_n(s)\gamma_n(s)$$
$$\left(C_n=\frac{1}{G_n(1-p)};\ p\neq 1\right) \qquad (7)$$

が得られる。ここでpは、K. Thompson&R. D. Ruth [3]の定義に従った。通常の加速器ではこの表現でほとんどの場合妥当な仮定となっている。尚、より一般的な仮定をした場合にも、本稿と同様に厳密解が得られることがわかっており、それを用いた不安定性抑制案も検討されている [5]。

3.2. 斉次解

このような仮定のもとでは、運動方程式(1)は簡単な解析解をもつ。すなわち、横方向変位$x_n(s)$は0次のベッセル及びノイマン函数によって

$$x_n(s)=A_nJ_0[\phi_n(s)]+B_nY_0[\phi_n(s)] \qquad (8)$$

と書くことができる。但し、A_n、B_n は定数である。$\phi_n(s)$ が大きいときは、ベッセル函数の漸近形を用いて

$$x_n(s)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\phi_n(s)}}\times$$
$$\left[A_n\cos[\phi_n(s)-\frac{\pi}{4}]+B_n\sin[\phi_n(s)-\frac{\pi}{4}]\right] \qquad (9)$$

となり一般に得られているWKB近似の結果と一致する[3]。逆に、$\phi_n(s)$ が小さい場合、すなわちベータトロン振動の位相進みが小さい領域ではこのWKB近似は不適当である。

3.3. 非斉次解／一般解

非斉次解を求めるには、いわゆる定数変化法を用いる。まず、函数 $a_n(s)$、$b_n(s)$ を導入して

$$x_n(s) = a_n(s)J_0[\phi_n(s)] + b_n(s)Y_0[\phi_n(s)] \qquad (10)$$

と書く。そして一般性を失うことなく、函数 $a_n(s)$、$b_n(s)$ に次のような条件を課す。

$$a_n'(s)J_0[\phi_n(s)] + b_n'(s)Y_0[\phi_n(s)] = 0 \qquad (11)$$

こうして、(10)式を(1)式に代入すると、

$$a_n'(s)J_1[\phi_n(s)] + b_n'(s)Y_1[\phi_n(s)] = -\frac{F_n(s)}{k_n(s)\gamma_n(s)} \qquad (12)$$

のような関係式が得られる。(11)、(12)式から函数 $a_n(s)$、$b_n(s)$ が求まり、

$$a_n(s) = -\frac{\pi}{2}C_n\int_0^s Y_0[\phi_n(s')]F_n(s')ds' \qquad (13)$$

$$b_n(s) = \frac{\pi}{2}C_n\int_0^s J_0[\phi_n(s')]F_n(s')ds' \qquad (14)$$

となる。したがって運動方程式(1)の一般解は、グリーン函数 $G_n(s,s')$ を用いて

$$x_n(s) = A_nJ_0[\phi_n(s)] + B_nY_0[\phi_n(s)] + \int_0^s G_n(s,s')F_n(s')ds' \qquad (15)$$

$$G_n(s,s') \equiv \frac{\pi}{2}C_n \times \left[-J_0[\phi_n(s)]Y_0[\phi_n(s')] + Y_0[\phi_n(s)]J_0[\phi_n(s')]\right] \qquad (16)$$

と書くことができる。なお、初期条件として $s=0$ のとき、$x_n(0)$、$x_n'(0)$ とすると係数 A_n、B_n が求まる。

$$A_n = -\frac{\pi\phi_n(0)}{2} \times \left[Y_1[\phi_n(0)]x_n(0) + \frac{Y_0[\phi_n(0)]}{k_n(0)}x_n'(0)\right] \qquad (17)$$

$$B_n = \frac{\pi\phi_n(0)}{2}\left[J_1[\phi_n(0)]x_n(0) + \frac{J_0[\phi_n(0)]}{k_n(0)}x_n'(0)\right] \qquad (18)$$

4. 厳密解の評価

ここで得られた一般解は、数学的には仮定(3)、(4)の下での厳密解に相当するが、実際的な条件(5)、(6)、(7)の下で結果のチェックを行なう。まず、運動方程式(1)を数値的に解き解析解と比較したが、両者は完全に一致した。次に横ウェーク場による効果を端的に表している簡単な例として、条件(5)、(6)、(7)の下でのTwo-particleモデルの場合について、考察を行なう。

一般解(15)、(16)によれば、先行粒子は当然横ウェーク場の影響を受けずに、

$$x_1(s) = A_1J_0[\phi_1(s)] + B_1Y_0[\phi_1(s)] \qquad (19)$$

と書けるが、後続粒子の横方向の位置は、先行粒子の作る横ウェーク場の影響を受けて

$$\begin{aligned} x_2(s) = &\left\{A_2 - \frac{\pi r_0N_1W_2}{2G_2(1-p)} \times \int_0^s\left[A_1J_0[\phi_1(s')]Y_0[\phi_2(s')] + B_1Y_0[\phi_1(s')]Y_0[\phi_2(s')]\right]ds'\right\} \times J_0[\phi_2(s)] \\ &+ \left\{B_2 + \frac{\pi r_0N_1W_2}{2G_2(1-p)} \times \int_0^s\left[A_1J_0[\phi_1(s')]J_0[\phi_2(s')] + B_1Y_0[\phi_1(s')]J_0[\phi_2(s')]\right]ds'\right\} \times Y_0[\phi_2(s)] \end{aligned} \qquad (20)$$

となる。このままでは複雑で見通しが悪いので、次のような簡単な場合を想定する。すなわち、

$$\phi_n(0) = \frac{k_{0n}\gamma_{0n}}{G_n(1-p)} << 1 \quad \text{--->}\ 0 \qquad (21)$$

が実現できる状況を考えると、(17)、(18)式から、

$$A_n = x_n(0) \tag{22}$$

$$B_n = 0 \tag{23}$$

となり、解は極めて簡単な形になる。

$$x_1(s) = x_1(0)J_0[\phi_1(s)] \tag{24}$$

$$x_2(s) = \left\{x_2(0) - \frac{\pi r_0 N_1 W_2}{2G_2(1-p)} x_1(0)\int_0^s J_0[\phi_1(s')]Y_0[\phi_2(s')]ds'\right\}J_0[\phi_2(s)] + \frac{\pi r_0 N_1 W_2}{2G_2(1-p)} x_1(0)\int_0^s J_0[\phi_1(s')]J_0[\phi_2(s')]ds' Y_0[\phi_2(s)] \tag{25}$$

ここで、ベッセル函数の積の積分を評価するためにさらに仮定をおく。まず、ϕ_n、k_n、G_nなどの添字nをとり、全ての粒子について同じ値とする。次に、K. Thompson&R. D. Ruthの論文[3]にしたがってp=0.5 の場合（容易に積分が実行できる場合）を考える。このとき、(21)の仮定の下では

$$k(s) = k_0\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + G\cdot s}} \approx k_0\sqrt{\frac{\gamma_0}{Gs}}$$

$$\phi(s) \approx 2k_0\sqrt{\frac{\gamma_0}{G}s} \qquad (s >> \frac{\gamma_0}{G}) \tag{26}$$

と書けることに注意すると、積分は容易にできて、

$$x_2(s) = x_2(0)J_0[\phi(s)] - \frac{r_0 N_1 W_2}{k_0\sqrt{\gamma_0 G}} x_1(0)\sqrt{s}J_1[\phi(s)] \tag{27}$$

となる。ウェーク場の影響によって、距離が増すにしたがって振幅が増えていくのがわかる。s ->大のときのベッセル函数の漸近形より、その増え方は距離の4分の1乗の依存性を示す。

ベータトロン振動の位相の進みϕを粒子毎に変えれば、いわゆるランダウダンピングが示されるが、計算が複雑になるので本稿では触れない。（計算によれば、p=0.5 の場合は効果が小さいと思われる。）

5. 結論

Rigid Macroparticleモデルで記述される横方向運動方程式について、ある極めて現実的な条件の下で非常に一般的に厳密解が得られることを示した。得られた結果から、加速のあるP. B. WilsonのTwo-particleモデルをK. Thompson&R. D. Ruthの収束系（(26)式）の場合に関してウェーク場の効果の評価を行なった。

ここで得られた解は、ベータトロン波数の距離依存性が距離のベキ乗（指数p）で変化する場合のみに適用できるが、より一般的な場合の厳密解も計算上得られることがわかっている[5]。今後、ウェーク場抑制策のより具体的な指針を得るために検討を進める予定である。

6. 参考文献

[1] K. Yokoya, "Cumulative Beam Breakup in Large-Scale Linacs", DESY 86-084, August 1986; Y. Ogawa, T. Shidara and A. Asami, "Direct Observation of the Multibunch Instability caused by a Transverse Wake Field", Phys. Rev. D43, 258 (1991).

[2] J. T. Seeman (private communication).

[3] K. Thompson and R. D. Ruth, "Controlling Transverse Multibunch Instability in Linacs of High-Energy Linear Colliders", Phys. Rev. D41, 964 (1990).

[4] P. B. Wilson, in Physics of High Energy Particle Accelerators (Fermilab Summer School, 1981), proceedings, Batavia, Illinois, edited by R. A. Carrigan et al., (AIP Conf. Proc. No.87) (AIP, New York, 1982), p.450.

[5] Y. Ogawa (in preparation).