pp-23

Gain of Coherent Undulator Radiation Built Up from Electron Bunch Oscillation

H. Nakazawa, H. Yachi, K. Hayakawa, T. Tanaka, T. Torizuka
Atomic Energy Research Institute, Nihon University, 7-24-1 Narashinodai, Funabashi, 274

Abstract
We calculated the gain of coherent undulator radiation by electrons passing through a FEL system.

電子のバンチ作用により立ち上がるコヒーレント・アンジュレータ放射のゲイン

1. はじめに

日本大学原子力研究所では紫外領域のＦＥＬの開発を進めている。昨年度から、アンジュレータと電子源の電子ライナックの組立を始めた。現在、アンジュレーターからの放射光の計測系の設計、及び電子ライナックの組立、調整を行っている。

本発表は、放射光に位相空間を導入し、この放射光と電子ビームとの相互作用することによる電子ビームの振る舞いの解析を行い、日大の施設における自由電子レーザーのゲインを計算した結果について述べるものである。

2. アンジュレーター、電子ライナック

アンジュレーター、電子ライナックの各パラメータを表1に示す[1]。

表1

アンジュレーター

アンジュレーター形式		Halbach	
アンジュレーター長	L_u	2400	mm
周期長	λ_u	24	mm
周期数	N	100	
Kパラメーター	K	0.70	

電子ライナック

電子エネルギー	60～125	MeV
加速周波数	2856	MHz
マクロパルス幅	20	μs
マクロパルス繰り返し	12.5	Hz
マクロパルス平均電流	200	mA
ミクロパルス幅	3.5	ps
ミクロパルス電流	20	A

3. 電子が放射する光の強度

相対論的に運動している n 個の電子からなる電子群が放射する光の強度を計算すると、単位立体角、単位角周波数あたり

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \left\{n + n(n+1)\left|F(k)\right|^2\right\}\left(\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\right)_1 \tag{1}$$

である[2]。ここで $(d^2I/d\omega d\Omega)_1$ は1電子が放射する光の強度である。$F(\omega)$は電子密度の形状因子である。これは、電子分布$\rho(r)$をフーリエ変換したもので

$$F(k) = \int \rho(r) e^{ik\hat{n}\cdot\vec{r}}\, dr \tag{2}$$

である。ここで、$\rho(r)$は規格化されていて

$$\int \rho(r)\, dr = 1 \tag{3}$$

で与えられる。ここで、(1)式の $n(n+1)\left|F(\omega)\right|^2$ の項はコヒーレント放射を示している。

4. 自由電子レーザーのゲイン

この計算では、z 方向の１次元の運動のみを記述する。そして、レーザー光は単色光であると仮定する。電子群がアンジュレータを通過するとき、電子群と光の相互作用による光の出力を無視すると、電子群による光の出力の増加ΔP は、電子数が $n>>1$ の条件では、

$$\Delta P = \frac{1}{L_u}\int_0^{L_U} n^2\left|F(k)\right|^2 p_1 dz = n^2\left\langle\left|F(k)\right|^2\right\rangle p_1 \tag{4}$$

となる。ここで、p_1 は１電子が放射する光の出力、L_u はアンジュレーター長、$\langle|F(k)|^2\rangle$はアンジュレーター中で形成される形状因子の２乗の平均値である。よって、光の出力が P のとき、ゲインは

$$G = \frac{n^2\left\langle\left|F(k)\right|^2\right\rangle p_1}{P} \tag{5}$$

で与えられる。ゲインは電子数 n の２乗に比例し、その大きさは電子群の形状因子、つまり電子の分布に依存する。

ゲインの解析をするためには、電子集群の解析を行い形状因子を求めることが必要となる。

5. 電子の運動の Hamiltonian

光共振器に入射された電子の位相振動について解析した。エネルギーは Lorentz 因子 γ で表し、γ_r を共鳴エネルギーとする。位相空間における１電子のエネルギー γ と位相 ψ は次の式で与えられる。

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e^2 E_l B_u}{2\gamma m_0^2 c\omega_u} f_{m=1}(K)\sin\psi \qquad (6)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_u\left(1-\frac{\gamma_r^2}{\gamma^2}\right) \qquad (7)$$

$$f_{m=1}(K) = J_0\left(\frac{K^2}{2(1+K^2)}\right) - J_1\left(\frac{K^2}{2(1+K^2)}\right) \qquad (8)$$

$$K = \frac{eB_u\lambda_u}{2\sqrt{2}\pi m_0 c} \qquad (9)$$

ここで J_n は n 次の Bessel 関数、B_u はアンジュレータのピーク磁束密度、E_l は光共振器内の電場、λ は光の波長、λ_u はアンジュレーターの周期長、ω_u は電子の z 軸方向の速度を v_z とすると、$\omega_u = 2\pi v_z/\lambda_u \approx 2\pi c/\lambda_u$ である。これはアンジュレーター磁場の角周波数に相当する。電子のエネルギーの広がりを $(\gamma-\gamma_r)/\gamma_r = \Delta\gamma/\gamma_r$ と定義し、(7)式を $\gamma \approx \gamma_r$ の範囲で近似すると

$$\frac{d\psi}{dt} \cong 2\omega_u\frac{\gamma-\gamma_r}{\gamma_r} = 2\omega_u\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r} \qquad (10)$$

が得られる。

ψ–$\Delta\gamma$ 空間において、電子の運動の Hamiltonian を導入すると以下のようになる。

$$H = \frac{\omega_u}{\gamma_r}(\Delta\gamma)^2 - \frac{\gamma_r}{2\omega_u}\Gamma^2\cos\psi \qquad (11)$$

$$\Gamma^2 = \frac{e^2 E_l B_l}{\gamma_r^2 m_0^2 c} f_{m=1}(K) \qquad (12)$$

また、(11)式の右辺第２項を Ponderomotive ポテンシャルという。

6．形状因子の変化

Hamiltonian を

$$\frac{H}{\gamma_r\omega_u} = \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{\omega_u}\right)^2\cos\psi \qquad (13)$$

と書き換える。このとき位相 ψ は時間変化を考慮すると

$$\psi = \dot{\psi}t + \psi_0 \qquad (14)$$

と表すことができる。ただし ψ_0 は初期位相、$\dot{\psi}$ は ψ の時間微分つまり角速度である。$(\Delta\gamma/\gamma_r)$ のエネルギー幅を持つ電子ビームがアンジュレーターに入射されると、

$$\frac{H}{\gamma_r\omega_u} = \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right)_{\mathrm{beam}}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{\omega_u}\right)^2\cos\psi_0 \qquad (15)$$

となる。電子ビームのエネルギーの広がり $(\Delta\gamma/\gamma_r)$ が Ponderomotive ポテンシャルに比べて十分大きいとき、つまり separatrix の振幅が電子ビームのエネルギーの広がりより非常に小さい条件、

$$(\Delta\gamma/\gamma_r) >> (\Gamma/\omega_u) \qquad (16)$$

で近似すると、(13)(14)(15)式より電子ビームのエネルギーの広がりは

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right) \approx \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right)_{\mathrm{beam}} + \frac{1}{4}\frac{(\Gamma/\omega_u)^2}{(\Delta\gamma/\gamma_r)_{\mathrm{beam}}} \times\left\{\cos\psi(1-\cos\dot{\psi}t) - \sin\psi\sin\dot{\psi}t\right\} \qquad (17)$$

と近似できる。

位相空間において規格化された電子エネルギーの広がりは

$$\frac{\Delta\gamma/\gamma_r}{4\pi\sqrt{H/(\gamma_r\omega_0)}} = \frac{\Delta\gamma/\gamma_r}{4\pi(\Delta\gamma/\gamma_r)_{\mathrm{beam}}} \qquad (18)$$

であるから、空間密度分布に対応する。これを Fourier 変換することによって形状因子 $F(k)$ を求めることができる。すなわち

$$F(k) = \frac{1}{4\pi\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right)_{\mathrm{beam}}} 4\int_0^{\pi}\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\cos\psi\, d\psi \qquad (19)$$

となる。形状因子は(17)、(18)、(19)式から

$$F(k) = \frac{1}{8}\frac{(\Gamma/\omega_u)^2}{(\Delta\gamma/\gamma_r)_{\mathrm{beam}}^2}(1-\cos\dot{\psi}t) \qquad (20)$$

となる。ここで $\dot{\psi}$ は

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_u\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right)_{\mathrm{beam}} \qquad (21)$$

で与えられる。形状因子は(20)、(21)式から

$$F(k) = \frac{1}{8}\frac{(\Gamma/\omega_u)^2}{(\Delta\gamma/\gamma_r)_{\mathrm{beam}}^2}\left[1-\cos\left\{\frac{4\pi}{\lambda_u}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right)_{\mathrm{beam}} z\right\}\right] \qquad (22)$$

形状因子の２乗の平均は(4)、(22)から

$$\left\langle\left|F(k)\right|^2\right\rangle = \frac{1}{L_u}\int_0^{L_U}\left|F(k)\right|^2 dz$$

$$= \frac{1}{64}\frac{\left(\frac{\Gamma}{\omega_u}\right)^4}{\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right)_{\mathrm{beam}}^4}\left\{\frac{3}{2} - \frac{2}{\Lambda}\sin\Lambda + \frac{1}{4\Lambda}\sin(2\Lambda)\right\} \qquad (23)$$

と得られる。ここで、Λ は

$$\Lambda = \frac{4\pi L_u}{\lambda_u}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r}\right)_{\mathrm{beam}} \qquad (24)$$

で表される。ゲインは(5)、(23)式から

$$G=\frac{n^2\left\langle\left|F(k)\right|^2\right\rangle p_1}{P}$$

$$=\frac{1}{64}\frac{n^2 p_1\left(\dfrac{\Gamma}{\omega_{\rm u}}\right)^4}{P\left(\dfrac{\Delta\gamma}{\gamma_{\rm r}}\right)^4_{\rm beam}}\left\{\frac{3}{2}-\frac{2}{\Lambda}\sin\Lambda+\frac{1}{4\Lambda}\sin(2\Lambda)\right\} \qquad (25)$$

となる。ここで

$$\Lambda=\frac{4\pi L_{\rm u}}{\lambda_{\rm u}}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_{\rm r}}\right)_{\rm beam} \qquad (26)$$

である。

7．数値計算

以上のゲインの計算は(16)式の

$$(\Delta\gamma/\gamma_{\rm r})>>(\Gamma/\omega_{\rm u}) \qquad (16)$$

で近似したものである。放射光が増幅して出力が大きくなると、解析的に解くことができなくなるため、

$$(\Delta\gamma/\gamma_{\rm r})<<(\Gamma/\omega_{\rm u})$$

の場合を含めて数値計算を行った。その結果を図１に示す。

8．まとめ

これまでの考察から、以下のことが結論付けられる。電子がアンジュレーターを通過するときに放射するレーザーのゲインの変化は、電子エネルギーの広がりをパラメーターとして表すと、図２のようになる。

アンジュレーターを通過するときに得られるゲインは入射する電子のエネルギーの広がりの４乗に逆比例する。このゲインは、光の出力が電子ビームのエネルギーの広がりに比べて小さいときはそのときの光の出力によらず一定である。しかし、光の出力が大きくなり電子ビームのエネルギーの広がりより大きくなると、ゲインは小さくなる。

したがって、ゲインを大きくするためには、電子のエネルギー広がりを狭くし、アンジュレーター長を長くすればよい。

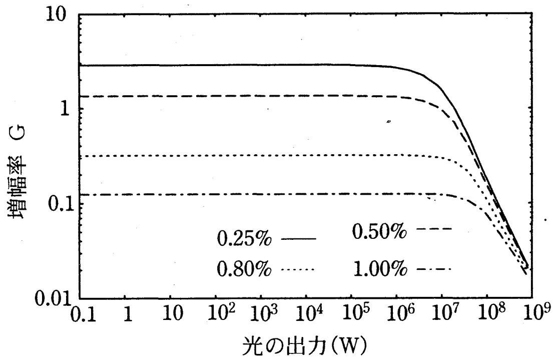

図１　ゲインの計算結果

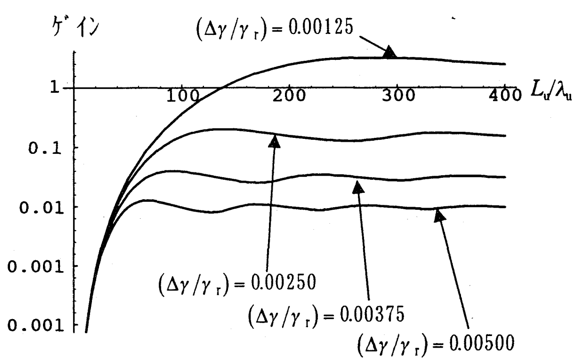

図２　ゲインの変化　横軸は周期数、縦軸はゲインの大きさ

§　参考文献

1) K. Hayakawa, et al., Proc. 21th Linear Accelerator Meeting in Japan 20(1996)
2) F. R. Elder, R. V. Langmuir and H. C. Pollock, Physical Review 74 (1948) 52.
3) H. Motz, Journal of Applied Physics 22 (1951) 527
4) D. A. G. Deacon, et al., Physical Review Letters 38 (1977) 892
5) 電磁気学(下)　J. D. Jackson 著　西田稔　訳　吉岡書店
6) J. S. Nodvick and D. D. Saxon, Physical Review 96 (1954) 180.
7) LASER HANDBOOK　Vol.6　North-Holland
8) 光エレクトロニクスの基礎　Amnon Yariv 著　多田邦夫、神谷武志　訳　丸善
9) シンクロトロン放射利用技術　高良和武 監修　サイエンスフォーラム