大強度ハドロンリングのチューンダイアグラム構成法について

岡本宏己，小島邦洸，渡嘉敷雄士（広島大学）

共鳴

ビームの受ける外力(多くは電磁石による)が周期的に変動する場合、
一定条件下での“**共鳴**”の発生は不可避である。

横方向自由度(2次元)における“ベータトロン共鳴”に注目し、以下の主張の正当性を示す:

- 高密度ビーム本体(テール部分は除く)の共鳴不安定性は集団的に起こる。
- いわゆる“incoherent resonance”なる現象は少なくともビーム核内部には存在せず、したがって“incoherent tune spread”のような概念はほぼ無意味である。
- 高密度ビームの共鳴不安定帯は従来の一般公式が予言する数の2倍存在し得る。
- 水平・鉛直方向の初期エミッタンス比が調整可能な場合、ビーム密度に関係なく、任意の差共鳴の発生を人為的に強く抑制できる。

以上の主張に基づいて、**チューンダイアグラム**の簡便な構成手順を与える。

自己無撞着理論

クーロンポテンシャルは長距離力を生む

↓

多数の荷電粒子が位相空間内で密集している時、粒子
個々が全く相関を持たずに運動することなどあり得ない！

↓

自己無撞着なアプローチ（PIC計算、ブラソフ解析など）が必須

ブラソフ-ポアソン方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial s} + [f, H_\perp] = 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi_{\mathrm{sc}} = -\dfrac{q}{\varepsilon_0}\iint f\, dp_x\, dp_y \end{cases}$$

個別粒子衝突（クーロン散乱）の影響が無視できる場合、極めて正確にビームの物理的振る舞いを予言する。

非線形誤差・補正磁場

$$H_\perp = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{1}{2}[K_x(s)x^2 + K_y(s)y^2] + \delta V(x, y; s) + \frac{4\pi\varepsilon_0 r_{\mathrm{p}}}{q\gamma^3\beta^2}\phi_{\mathrm{sc}}(x, y; s)$$

m 次共鳴条件（1 次元）

- Single-particle resonance

$$m\nu_0 = n$$

- Incoherent resonance

$$m(\nu_0 - \Delta\nu) = n$$

- Coherent resonance

$$m(\nu_0 - C_{mh}\Delta\nu) = n$$

C_{mh} : 位相空間における方位角方向モード数(m)および
動径方向のモード数(h)に依存するパラメータ

F. J. Sacherer, Ph.D thesis, Lawrence Radiation Laboratory, 1968;
Report No. UCRL-18454, 1968.

m 次共鳴条件（1次元）

- Single-particle resonance

$$m\nu_0 = n$$

- Incoherent resonance

Incoherent tune shift

- ✓ 個別粒子依存
- ✓ 分布関数依存
- ✓ 観測不能量

$$m(\nu_0 - \Delta\nu) = n$$

- Coherent resonance

$$m(\nu_0 - C_{mh}\Delta\nu) = n$$

C_{mh}：位相空間における方位角方向モード数(m)および動径方向のモード数(h)に依存するパラメータ

F. J. Sacherer, Ph.D thesis, Lawrence Radiation Laboratory, 1968; Report No. UCRL-18454, 1968.

m 次共鳴条件（1 次元）

- Single-particle resonance

$$m\nu_0 = n$$

- Incoherent resonance

Incoherent tune shift

✓ 個別粒子依存
✓ 分布関数依存
✓ 観測不能量

$$m(\nu_0 - \Delta\nu) = n$$

- Coherent resonance

$$m(\nu_0 - C_m \Delta\bar{\nu}) = \frac{n'}{2}$$

H. Okamoto and K. Yokoya, Nucl. Instrum. Meth. A **482**, 51 (2002).

m 次共鳴条件（２次元）

- Single-particle resonance

$$k\nu_{0x} + \ell\nu_{0y} = n$$

業界で広く用いられている公式

過去数十年にわたり、これらに基づいて“チューンダイアグラム”が描かれている。

- Incoherent resonance

$$k(\nu_{0x} - \Delta\nu_x) + \ell(\nu_{0y} - \Delta\nu_y) = n \qquad (k, \ell, n) \text{ は整数}$$

- Coherent resonance

？？？？？

m 次共鳴条件（２次元）

- Single-particle resonance

$$k\nu_{0x} + \ell\nu_{0y} = n$$

> 業界で広く用いられている公式
>
> 過去数十年にわたり、これらに基づいて“チューンダイアグラム”が描かれている。

- Incoherent resonance

$$k(\nu_{0x} - \Delta\nu_x) + \ell(\nu_{0y} - \Delta\nu_y) = n \qquad (k, \ell, n) \text{ は整数}$$

- Coherent resonance

$$k(\nu_{0x} - C_m\Delta\bar{\nu}_x) + \ell(\nu_{0y} - C_m\Delta\bar{\nu}_y) = \frac{n'}{2}$$

$m = |k| + |\ell|$

C_m : 共鳴の次数(m)のみに依存する1より小さい定数

K. Kojima, H. Okamoto and Y. Tokashiki, Phys. Rev. AB **22**, 074201 (2019).

m 次共鳴条件（２次元）

- Single-particle resonance

$$k\nu_{0x} + \ell\nu_{0y} = n$$

業界で広く用いられている公式

過去数十年にわたり、これらに基づいて
“チューンダイアグラム”が描かれている。

- Incoherent resonance

$$k(\nu_{0x} - \Delta\nu_x) + \ell(\nu_{0y} - \Delta\nu_y) = n \qquad (k, \ell, n) \text{ は整数}$$

- Coherent resonance

$$k(\nu_{0x} - C_m \Delta\bar{\nu}_x) + \ell(\nu_{0y} - C_m \Delta\bar{\nu}_y) = \frac{n'}{2}$$

高密度領域では、共鳴
帯の数が2倍に増える！

RMS tune shifts

- ✓ 個別粒子不依存
- ✓ 分布関数不依存
- ✓ 測定可能

$m = |k| + |\ell|$

C_m : 共鳴の次数(m)のみに依存する1より小さい定数

K. Kojima, H. Okamoto and Y. Tokashiki, Phys. Rev. AB **22**, 074201 (2019).

ビーム核とビームハロー

ビーム核そのものの安定性に関する議論と核の周囲に存在する尻尾（tail particles）の安定性に関する議論を混同してはいけない！

↓

最も知りたいのは"ビーム本体（コア部分）"の安定性である！

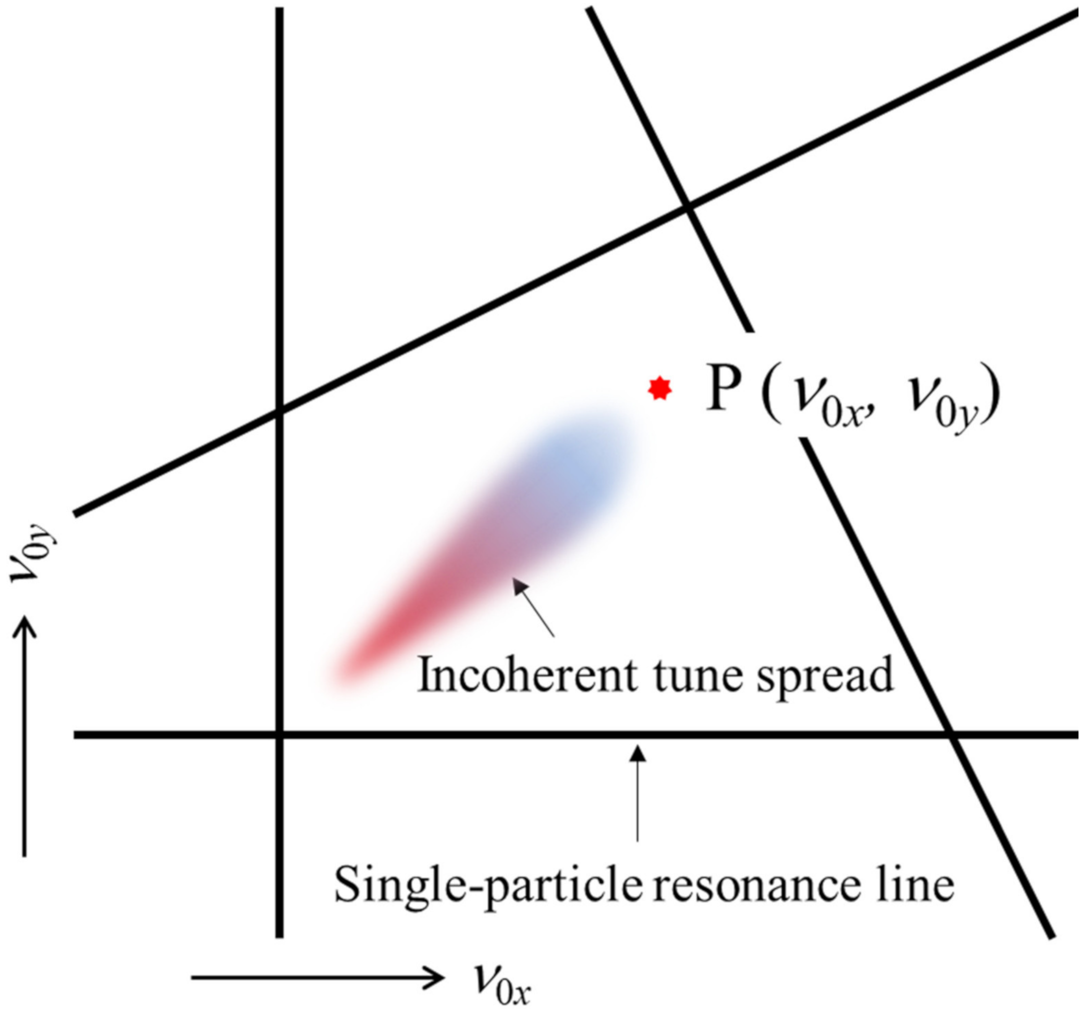
ビーム核が共鳴不安定化する条件（coherent resonance condition）はブラソフ方程式から摂動論的に導かれたもので、強い初期不整合を持つビームや何らかの理由で既に崩壊したビームの安定性を記述するものではない。

尻尾（ビームハロー）を構成する粒子はコア部分とのクーロン結合が弱く、擬単粒子的な振る舞いを示す；incoherent tune shiftはさほど大きくない。

コアの創るポテンシャルが或る種の外場として作用（Frozen Space-charge Model）

注："**ビーム核**"を実空間上で定義しても無意味；核はμ-空間で定義しなければならない。

チューンダイアグラム（**incoherent** picture）



単粒子共鳴条件

$$k\nu_{0x} + \ell\nu_{0y} = n$$

インコヒーレント共鳴条件

$$k(\nu_{0x} - \Delta\nu_x) + \ell(\nu_{0y} - \Delta\nu_y) = n$$

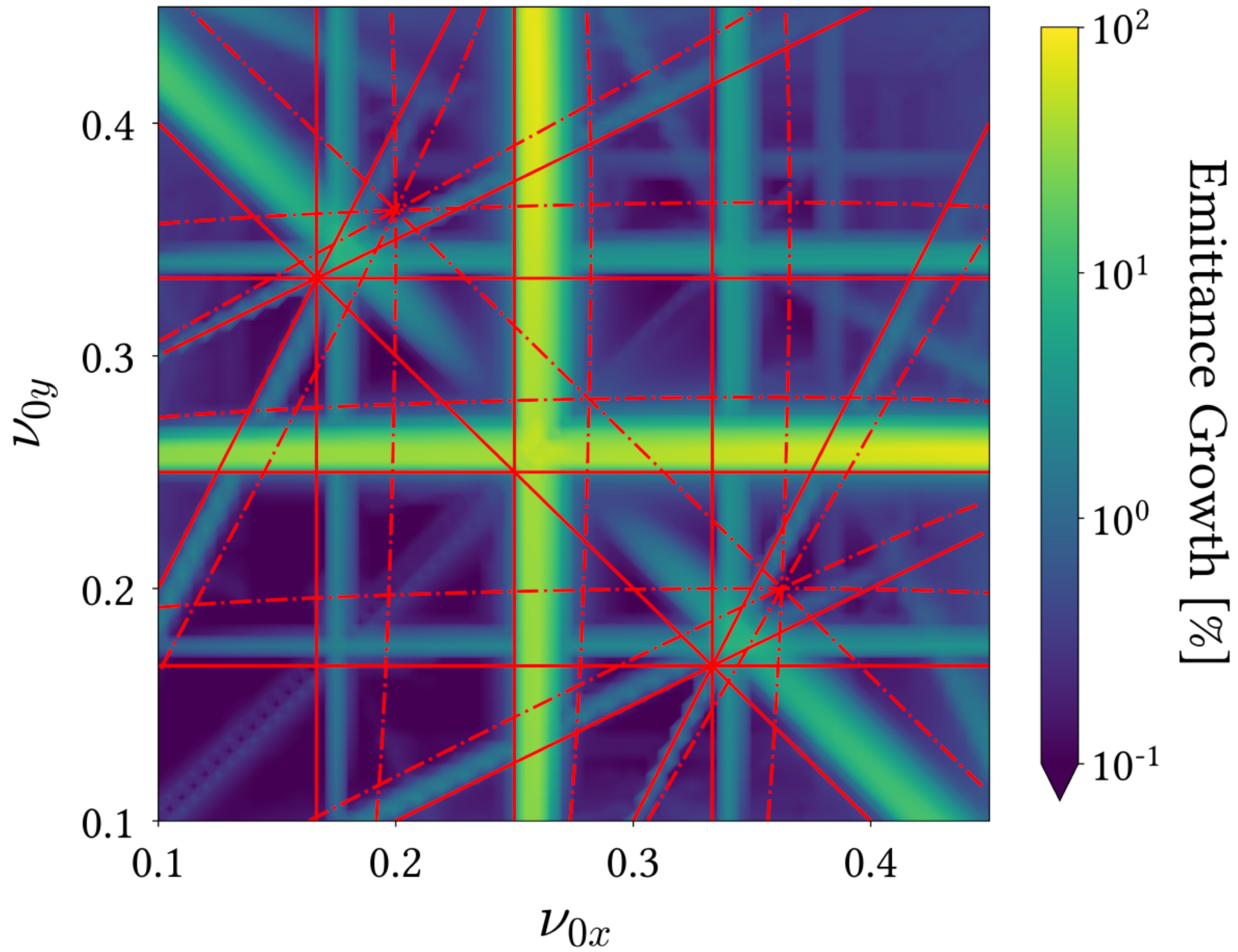
現行ルール

① 単粒子共鳴線を引く。ただし、どの次数の共鳴まで考慮するかに関する明確な指導原理はない。

② インコヒーレントチューンのもっともらしいシフト量を計算する。粒子分布関数は適当に仮定するしかない（ガウス型が頻繁に用いられている）。

③ インコヒーレントチューンの分布領域が①で描いた単粒子共鳴線と重ならない位置に動作点 P を置く。

PIC計算例 1



コヒーレント描像

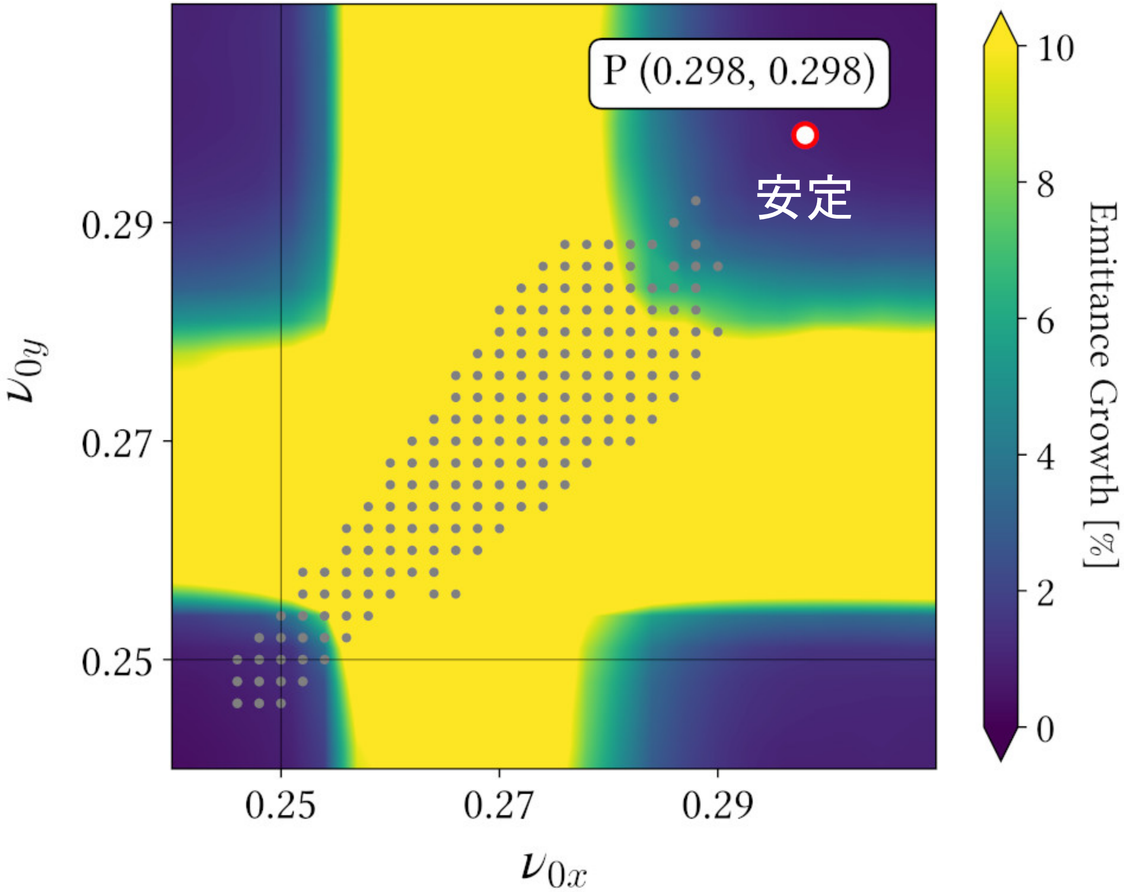
- 観測された共鳴帯はほぼ全て3次以下（一部4次）の低次不安定性

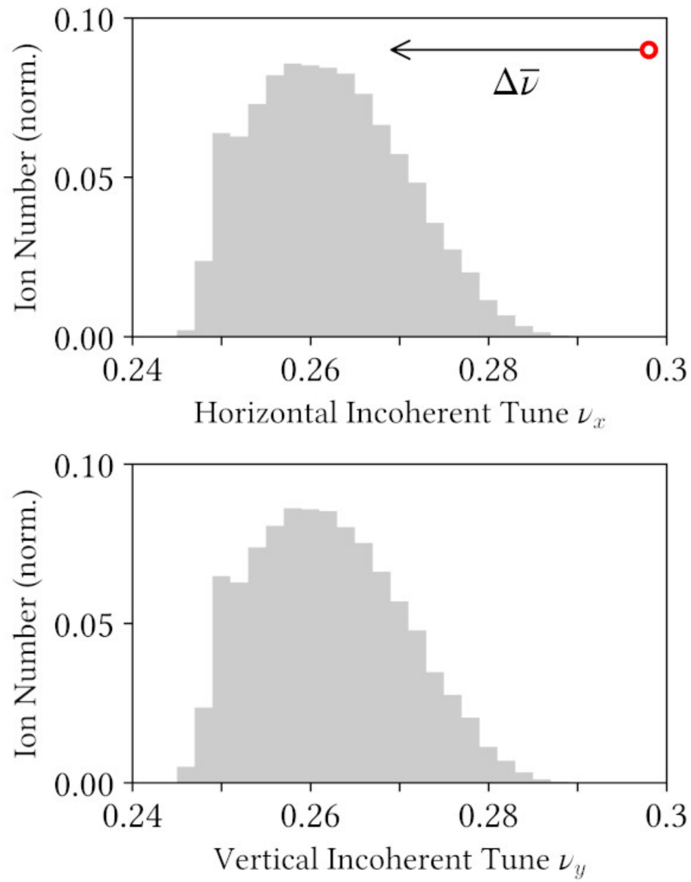
インコヒーレント描像

- 少なくとも8次までの高次不安定性を考えない限り、左図の結果は説明できない。
- 最も強い共鳴は4次ということになってしまう。
- バンド幅の共鳴次数依存性が説明できない。
- バンド幅は所謂“incoherent tune spread”に比べて明らかに狭い。

PIC計算例 2

インコヒーレントな共鳴は実際にビーム核内部で起こり得るのか？

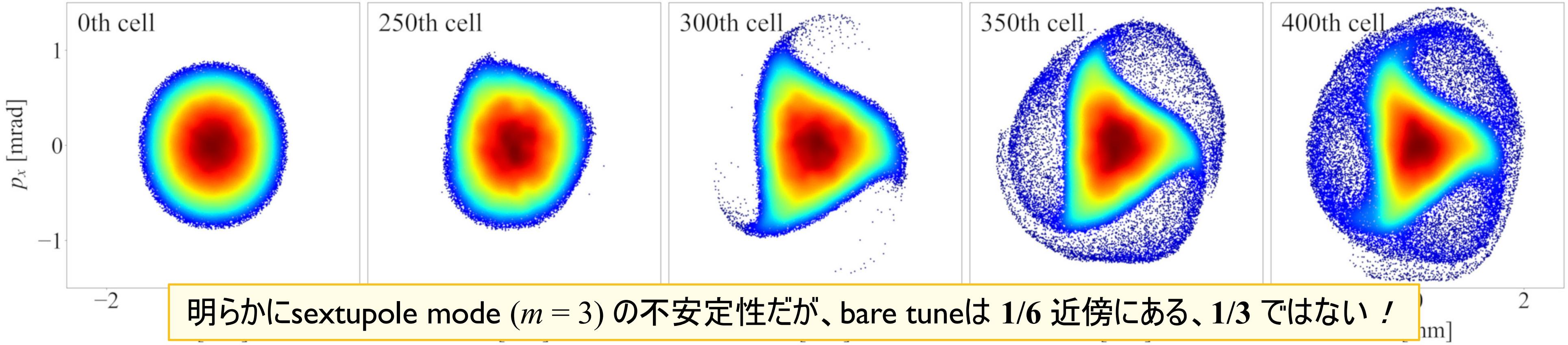




PIC計算例３

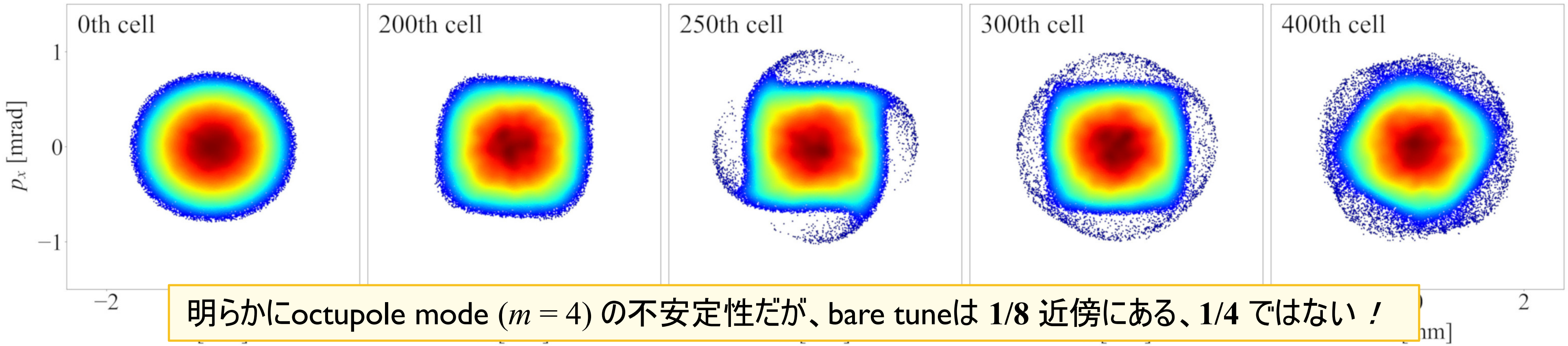
Initially matched “**waterbag**” core ($\eta = 0.8$)

(a) $\nu_0 = 0.192$



明らかにsextupole mode ($m = 3$) の不安定性だが、bare tuneは **1/6** 近傍にある、**1/3** ではない！

(b) $\nu_0 = 0.147$

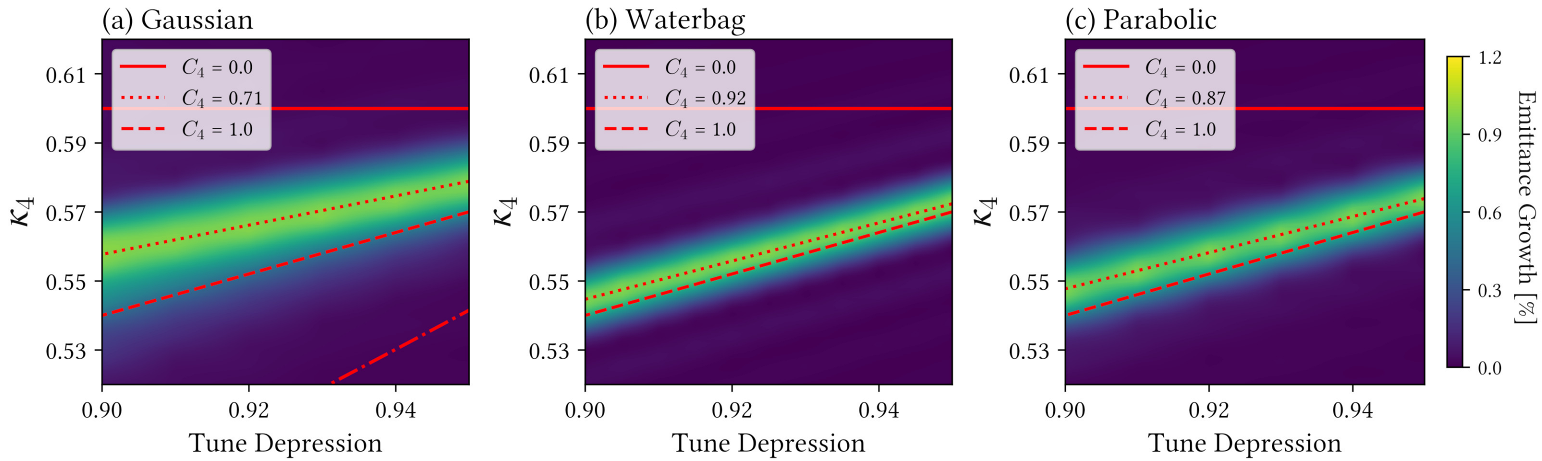


明らかにoctupole mode ($m = 4$) の不安定性だが、bare tuneは **1/8** 近傍にある、**1/4** ではない！

コヒーレントチューンシフト因子の評価

任意周波数(チューン κ_m)の m 次外部摂動による共鳴の発生条件：

Tune depression η が固定されている場合　$$k\nu_{0x} + \ell\nu_{0y} = \frac{\kappa_m}{1-(1-\eta)C_m}$$



非結合共鳴

	C_2	C_3	C_4
Gaussian	0.78 ± 0.05	0.77 ± 0.06	0.71 ± 0.06
Waterbag	0.71 ± 0.04	0.87 ± 0.03	0.92 ± 0.01
Parabolic	0.73 ± 0.05	0.85 ± 0.04	0.87 ± 0.02

結合(和)共鳴

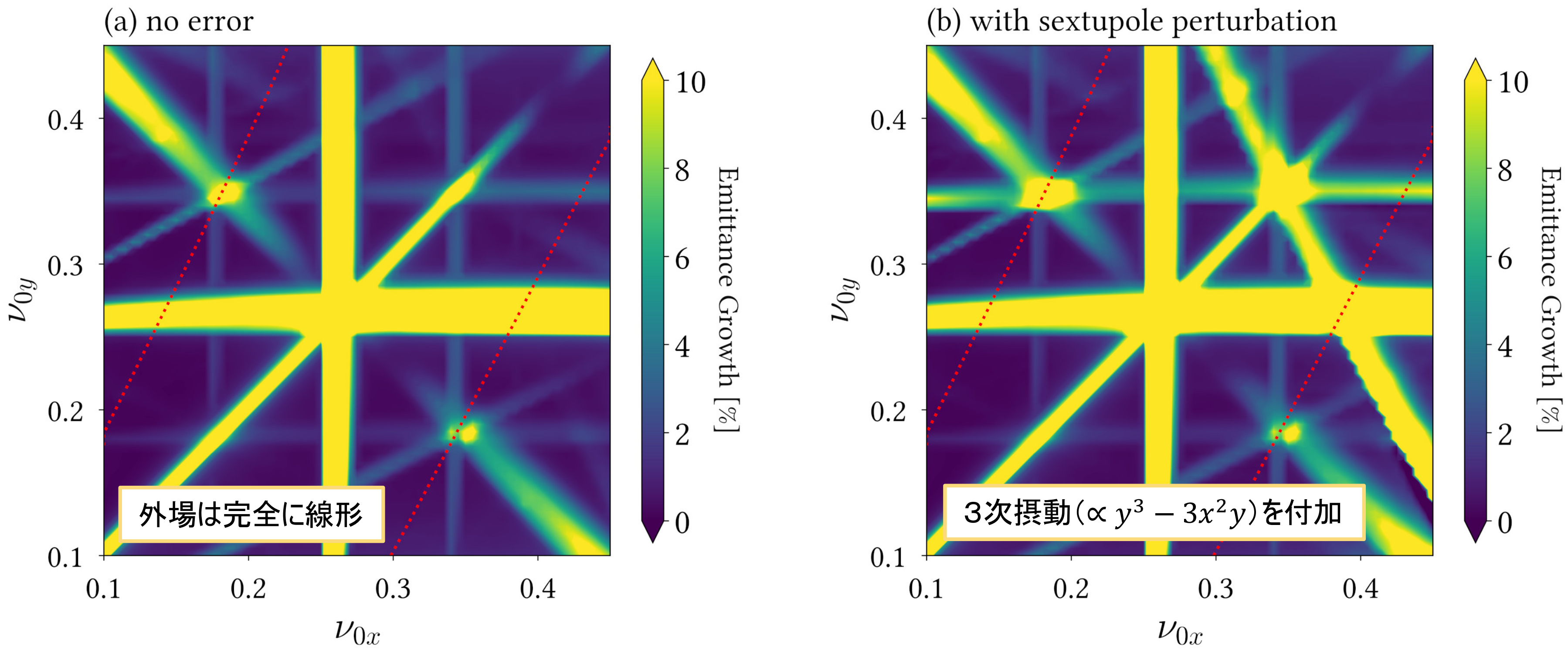
	C_2	C_3	C_4
Gaussian	0.71 ± 0.05	0.72 ± 0.08	-----
Waterbag	0.72 ± 0.05	0.82 ± 0.03	0.84 ± 0.01
Parabolic	0.71 ± 0.05	0.80 ± 0.05	0.79 ± 0.01

差共鳴帯の抑制

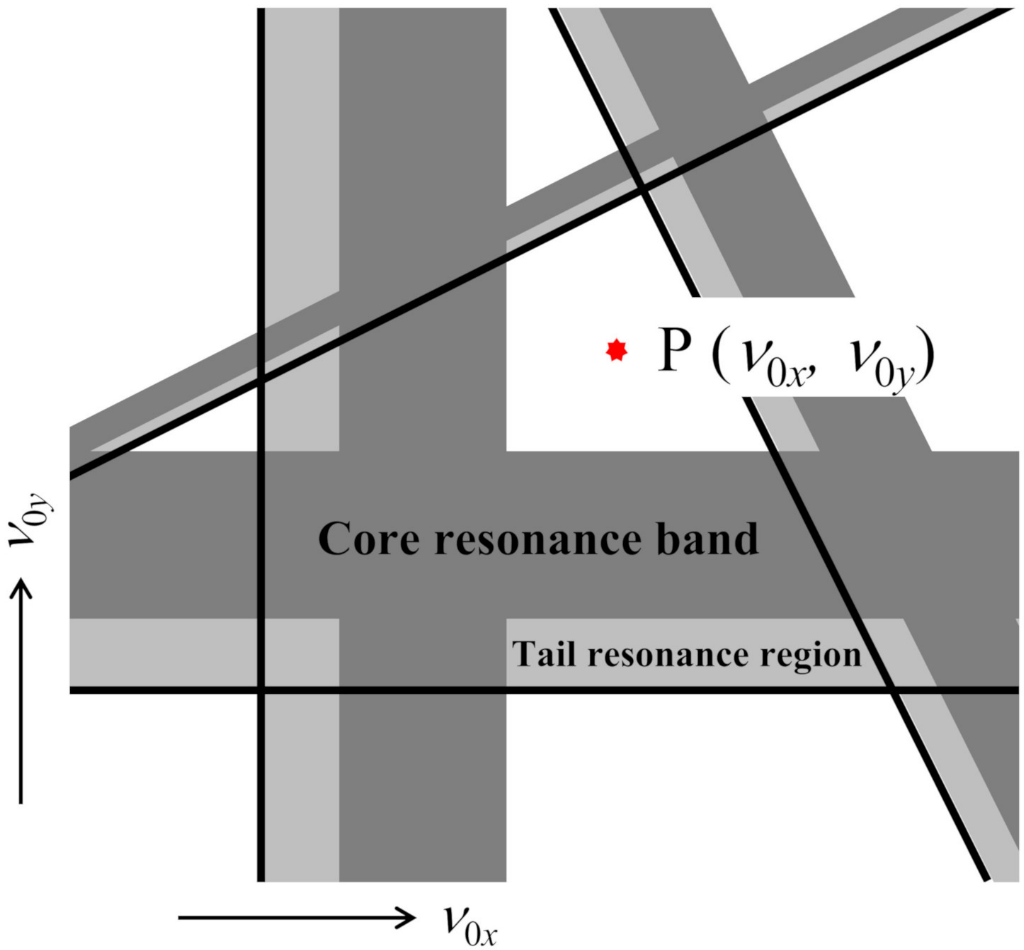
初期エミッタンスが条件 $I_{k\ell} \equiv \dfrac{\varepsilon_x}{k} + \dfrac{\varepsilon_y}{\ell} = 0$ を満たす場合、

対応する差共鳴 $(k\ell < 0)$ の発生が強く抑制される！

初期エミッタンス比 $\varepsilon_x / \varepsilon_y = 2$ $(I_{2,-1} = 0)$ の下で行ったPIC計算の結果



チューンダイアグラム（**coherent** picture）



コヒーレント共鳴条件

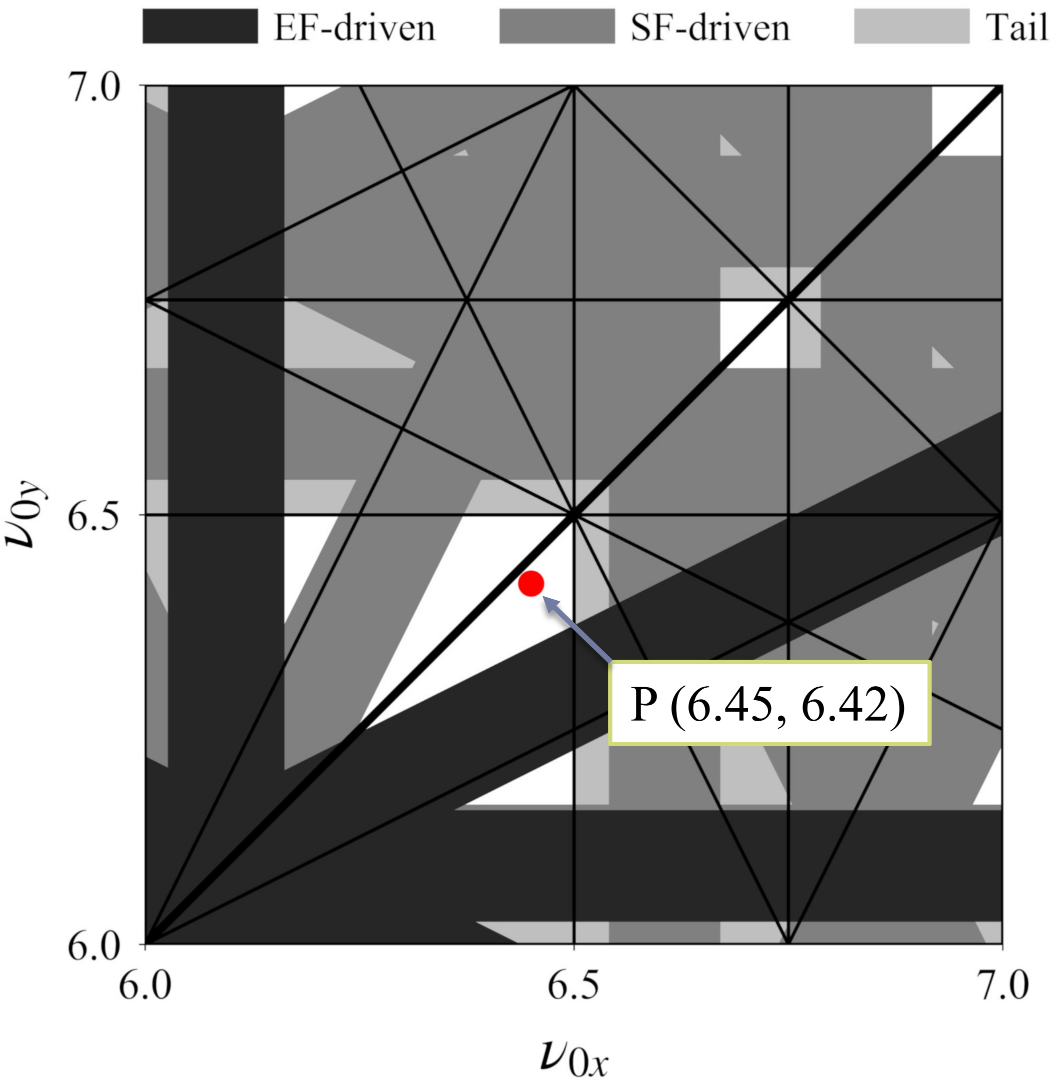
$$k(\nu_{0x}-C_m\Delta\bar{\nu}_x)+\ell(\nu_{0y}-C_m\Delta\bar{\nu}_y)=\frac{N_{\mathrm{sp}}n'}{2}$$

バンド幅： $\dfrac{\Delta\bar{\nu}}{\eta}\approx\dfrac{\lambda R r_{\mathrm{p}}}{4\varepsilon_\perp\beta^2\gamma^3}$

新ルール

① 低次モードのC_m因子として適切な値を選ぶ。
② 2次元コヒーレント共鳴仮説に基づいて、3次（リングの動作条件によっては4次）までの共鳴線を引く。
③ 上掲の近似式を使って、②で描いた共鳴線に一定のバンド幅を付与する。
④ 条件 $I_{k\ell}=0$ を満たす差共鳴がもしあれば、当該共鳴帯の幅は狭めるか、あるいは単に無視する。
⑤ 単粒子共鳴線と集団共鳴帯に挟まれた領域（テール共鳴領域）は不安定帯と見なす。
⑥ バンド・フリー領域に動作点 P を置く。

適用例（RCS @ J-PARC）



ラティス超周期数	3
周長（$2\pi R$）	348.333 m
初期エネルギー	400 MeV
初期エミッタンス	200 πmm·mrad
バンチ長	92 m
粒子数（単バンチ）	4.165×10^{13}

RMS tune depression : $\eta \approx 0.98$

Band width : $\frac{\Delta\nu}{\eta} \approx 0.13$

- Sextupole mode ($m \leq 3$) 以下の低次不安定性を考慮。
- $C_2 = 0.75$ および $C_3 = 0.8$ を仮定。
- RCSでは $\varepsilon_x \approx \varepsilon_y$ なので、$(k, \ell, n') = (1, -1, 0)$ に沿った差共鳴のバンド幅をほぼ無視。