

## アダマール変換に基づく横方向エミッタンス診断系の開発

### DEVELOPMENT OF TRANSVERSE EMITTANCE DIAGNOSTIC SYSTEM BASED ON HADAMARD TRANSFORM

竹本伊吹<sup>#,A)</sup>, 榊泰直<sup>A)</sup>, 宮武立彦<sup>B)</sup>, 小島完興<sup>B)</sup>, 錦野将元<sup>B)</sup>, 白井敏之<sup>C)</sup>, 近藤公伯<sup>B)</sup>  
Ibuki Takemoto<sup>#,A)</sup>, Hironao Sakaki<sup>A)</sup>, Tatsuhiko Miyatake<sup>B)</sup>, Sadaoki Kojima<sup>A)</sup>, Masaharu Nishikino<sup>A)</sup>,  
Toshiyuki Shirai<sup>A)</sup>, Kiminori Kondo<sup>A)</sup>

<sup>A)</sup> Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

<sup>B)</sup> Kansai Photon Science Institute (KPSI), National Institutes for Quantum Science and Technology

<sup>C)</sup> National Institute of Radiological Sciences (NIRS), National Institutes for Quantum Science and Technology

#### Abstract

At QST, the "Quantum scalpel project", a compact and high-performance heavy ion radiotherapy by applying laser-driven ion injector and a superconducting synchrotron, is underway. For the practical application to a carbon ion injector produced by laser-driven ion acceleration, it is necessary to demonstrate the beam quality satisfies the requirements of the downstream synchrotron. Among them, the transverse emittance is especially important parameter to control the beam transport. In this study, we devised a diagnostic system that incorporates the Hadamard transform, a mathematical analysis method, into the double-slit method, an emittance measurement method, and report the results.

#### 1. 研究背景・目的

量研関西研では、小型重粒子線がん治療装置「量子メス」の実現に向けて、レーザー駆動イオン加速機構によって加速される炭素イオン入射器の開発に取り組んでいる。イオン入射器の下流装置であるシンクロtron側に効率的に炭素ビーム輸送するためには、特にビームの横方向エミッタンスの制御が重要となる。横方向エミッタンスとは、ビームを構成する粒子の位置・運動方向による位相空間の大きさであり、ビームのばらつき度合いを表すパラメータである。レーザー駆動イオン加速により生成される陽子ビームの横方向エミッタンスは、現行の ECR イオン源によって生成されるビームと比較して 2 桁以上優れた値であることが報告されている[1]。一方で、炭素ビームに関しては、同時加速される陽子ビームや酸素ビームを弁別することが容易ではないため、炭素ビームの横方向エミッタンスが評価された例はない。そこで、我々は炭素ビーム横方向エミッタンス診断系の開発に挑戦することにした。

炭素ビームの計測という課題に対して、今回開発する診断系 (Fig. 1 上) では、四重極磁石とピンホールによる核種の磁場弁別を行い、ToF (Time of Flight) 計測によって対象とする炭素イオンのみを計測する。また、横方向エミッタンスの計測には、ダブルスリット法[2]と呼ばれる二枚のスリットでビームの位置方向・運動方向を切り出し、走査によって位相空間分布を求める手法を用いる。

この診断手法によって様々なイオンが混在するビームの中から炭素ビームのみを計測することが原理的には可能となる。一方で、非常に低エミッタンスビームを高精度に計測するためには、スリット間距離を離すか、スリットの幅を数十  $\mu\text{m}$  オーダーと微細化して高分解能を得る必要がある。その結果、二つのスリットを通過して観測される信号強度は微小となることから、電磁ノイズが観測信号

<sup>#</sup> takemoto.ibuki.307@s.kyushu-u.ac.jp

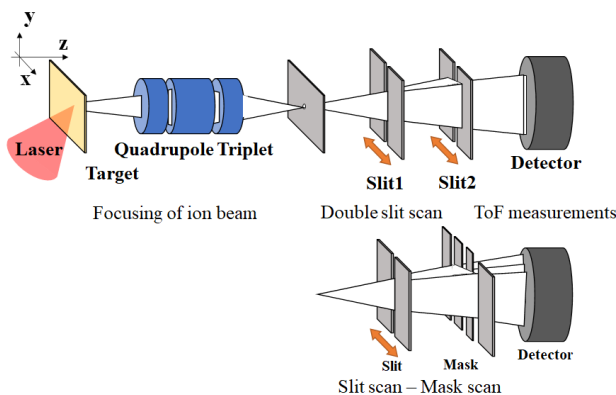


Figure 1: Transverse emittance diagnostic method.

に対して支配的となり、レーザー強度の不安定性や加速される粒子数などの観測揺らぎがエミッタンス計測値に大きな誤差として畳み込まれる。さらに、統計精度を考えると一つのエミッタンス計測には数千を超える膨大なショット数が必要であると考えられる。

本研究ではこれらの課題を解決し、高精度・高効率に炭素ビーム横方向エミッタンスを計測する手法として、信号のマルチプレックス化に着目した。マルチプレックス化とは、信号一点一点を個別に走査して計測するのではなく、マスクを用いて複数の信号をまとめて計測し、マスクを走査して得られた結果から、各点の信号を復元する手法である。本報告ではアダマール変換[3,4]と呼ばれるマルチプレックス手法をエミッタンス計測に取り入れた診断系 (Fig. 1 下) の概要及び進捗について報告する。

#### 2. アダマール変換

##### 2.1 アダマール行列の概要

アダマール行列(以下 H 行列)は行列の要素が+1 及び-1 で構成される  $n \times n$  の正方行列で、(1)式の条件を満

たす行列を指す。

$$\mathbf{H}_n \mathbf{H}_n^T = \mathbf{H}_n^T \mathbf{H}_n = n \mathbf{I}_n \quad (1)$$

H 行列の次数が 4 次と 2n 次の例を以下に示す。

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

H 行列をマスクとして計測に用いた場合、+1 は透過、-1 は反射を意味しており、4 次の H 行列の場合、観測値は下式で表される。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X}, \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

誤差  $\mathbf{e}$  は信号の強度に依存しない確率変数で、分散  $\sigma^2$  を持つと仮定する。ここで、求めたい信号の推定値  $\hat{\mathbf{X}}$  は

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y} \quad (4)$$

最小二乗法における回帰係数を解くことで求められるのだが、H 行列の場合(1)式の特徴から、

$$\hat{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}, \quad \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Y} \quad (5)$$

逆行列を観測値にかけ合わせることで、求めたい信号 X の各要素を独立に推定することが可能となる。

また、(6)式に示すように全ての要素が+1 のブランク行列から H 行列を引くことで、要素が+1 と 0(遮へい)で構成される S 行列を得る。

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} - \mathbf{H}), \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

本研究では、S 行列を基に作成したマスクをビーム計測に適用する。

## 2.2 S 行列による計測精度の向上

信号のマルチプレックス化を行うことで、計測で生じる誤差をどの程度低減させることが出来るのかを示す。まず、スリットで分布を n 分割して走査する場合、観測値は以下の式で表される。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}\mathbf{X} + \mathbf{e} = \mathbf{X} + \mathbf{e} \quad (7)$$

この場合、各点の推定値の誤差は

$$\varepsilon_i = E \left\{ (\hat{X}_i - X_i)^2 \right\}, \quad \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{e}$$

であるから、全体の平均二乗誤差は

$$\varepsilon_E = \frac{1}{n} \sigma^2 \text{Trace}\{(\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1}\} = \sigma^2 \quad (8)$$

である。対して、n 次の S 行列から作成したマスクで計測した場合は、

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{e} \quad (9)$$

平均二乗誤差は

$$\varepsilon_S^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 \text{Trace}\{(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}\} = \left[ \frac{4n}{(n+1)^2} \right] \sigma^2 \quad (10)$$

となり、n 次の S 行列に基づくマスクを用いてマルチプレックス化を行えば、 $4n/(n+1)^2$  だけ誤差を低減させることができる。以上のことから、信号強度に依存しないノイズが支配的で計測が困難であった場合にマルチプレックス化を適用することで計測が可能となる。

## 3. アダマール変換のビーム計測への適用

アダマール変換を用いた計測手法が横方向エミッタ横方向エミッタンス計測における本計測手法の有効性を確認するために、粒子輸送計算コードである phits[5] を用いてシミュレーションを行い、ダブルスリット法の計測結果と比較した。作成した輸送体系を Fig. 2 に示す。線源には 1 MeV/u の C<sup>4+</sup> 位相空間線源を用い、規格化 rms エミッタンスが 0.01 [ $\pi\text{mm}\cdot\text{mrad}$ ] になるように x 方向に 500 [ $\mu\text{m}$ ] のガウス分布標準偏差、x' 方向に 0.434 [ $\text{mrad}$ ] のガウス分布標準偏差を指定した。

また、第一スリットは 100 [ $\mu\text{m}$ ] 幅のスリットを 300 [ $\mu\text{m}$ ] 間隔で走査し、第二スリットは 100 [ $\mu\text{m}$ ] 幅のスリットを第一スリットで切り出したビーム中心から  $\pm 750$  [ $\mu\text{m}$ ] (分解能 0.3 [ $\text{mrad}$ ]) の範囲を走査する。マスクの場合も同様に 15 次の S 行列からマスクを作成してビーム中心から  $\pm 750$  [ $\mu\text{m}$ ] の範囲を 15 パターンのマスクを順次走査しながら計測し、各点の信号に復元する。

Figure 3 に phits で計算した位相空間図を示す。まず、ダブルスリット法で求めた位相空間分布は線源で指定した位相空間分布と比較して x' 方向の分布が小さく表れていることが見て取れる。この理由としては通過する粒子数が少ない領域で統計誤差が影響していると考える。統計誤差はシミュレーションの試行回数を増やすことで低減

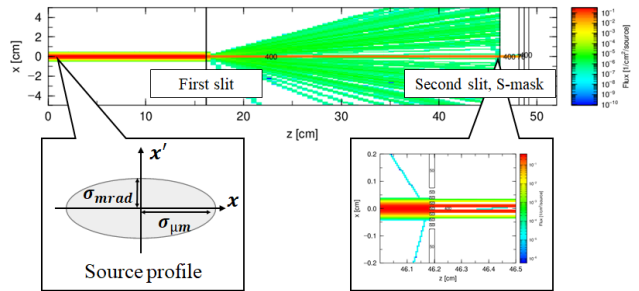


Figure 2: Simulation system.

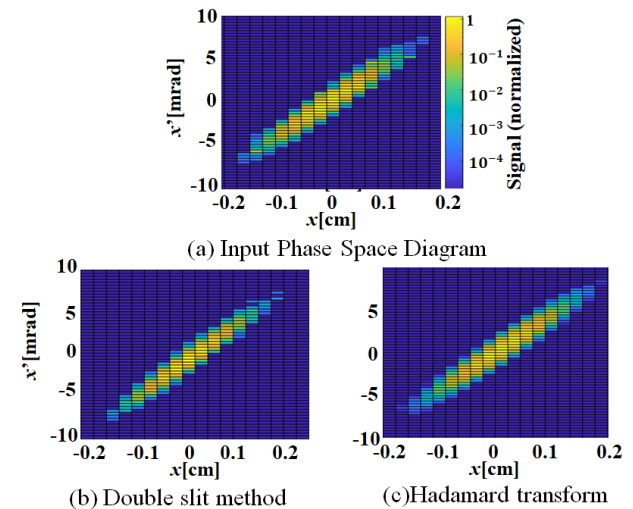


Figure 3: Measurement results of phase space distribution.

Table 1: Comparison of Transverse Emittance

	$\epsilon_{n,RMS}$ [ $\pi$ mm-mrad]	Error [%]
Double slit	0.0088	13.5
Hadamard Transform	0.0097	2.6

させることができるが、これは実際の計測で統計精度を得るために同一箇所を複数回ショットすることと同義である。対して、アダマール変換の場合では、粒子数が少ない領域も重ね合わせて計測するため、統計誤差が限りなく小さく、線源の位相空間分布と近い分布が得られた。

Table 1 に位相空間分布から計算したエミッタンスの結果を示す。ダブルスリット法ではおよそ 13.5% の誤差が生じている。アダマール変換では各点の推定値に多少のずれがあるものの、全体の分布は高精度に再構成出来ているため、入力パラメータとほぼ近いエミッタンス計測値を示した。

#### 4. まとめ・今後の展望

アダマール変換による信号のマルチプレックス化を横方向エミッタンス計測に組み込んだ診断系を考案した。低エミッタンスビームの高精度計測のためには、スリット幅や走査範囲を微細化する必要がある一方、通過する信号に対するノイズや観測揺らぎが計測値に与える影響が無視できなくなる。アダマール行列に基づいて作成したマスクにより複数の信号を重ね合わせ、復元することで、統計誤差の影響を有意に低減可能であることを確認した。今後は、ショット毎に発生する観測誤差(信号の揺らぎ)が生じた場合の観測値の補正方法や、より少ない回数で横方向エミッタンスの計測が可能となる方法を開発していく。

#### 謝辞

本研究は JST 未来社会 JPMJMI17A1 の助成を受けたものである。

#### 参考文献

- [1] T Cowan *et al.*, Phys. Rev. Lett. 92, 204801 (2004).
- [2] LeJeune *et al.*, in Applied Charged Particle Optics, edited by A.Septier (Academic Press, New York, 1980), p. 205.
- [3] M. Harwit and N.J.A. Sloane: Hadamard Transform Optics (Academic press, 1979).
- [4] 蟻川達男, アダマール変換分光, 日本物理學會誌. 39. 11 (1984) 835-843.
- [5] T. Sato *et al.*, Features of Particle and Heavy Ion Transport code System (PHITS) version3.02, J. Nucl. Sci. Technol. 55, 684-690 (2018).