ORBIT CORRECTION USING THE EIGENVECTOR METHOD WITH CONSTRAINTS FOR ERLS

Norio Nakamura[1,A)], Kentaro Harada[B)]
A) Institute for Solid State Physics(ISSP), University of Tokyo
5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa, Chiba, 277-8581
B) High Energy Accelerator Organization(KEK)
1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki, 305-0801

Abstract

Orbit correction using the eigenvector method with constraints(EVC method) was successfully applied to the compact ERL. Orbit distortion generated by a position error of eight main superconducting cavities was globally corrected by the EVC method and exact local correction of beam positions at the selected beam position monitors(BPMs) was simultaneously achieved by the constraint conditions without using many eigenvectors that caused significant orbit distortion and emittance growth in the regions without any BPM. This method can be highly useful for orbit correction and stabilization in future ERL-based light sources.

束縛条件付き固有ベクトル法によるERLの軌道補正

１．はじめに

エネルギー回収型リニアック(ERL)では、ビームがエネルギー回収のために２回以上通過する領域が存在する。ビームの軌道補正を行う場合に、その領域にある補正電磁石は２回以上のキックをビームに与え、その蹴り角は通過ビームの運動量に応じて異なる。そのため、軌道補正で最適な軌道を得るためには、通常の線形加速器やビーム輸送路に比べてより高度な軌道補正方法が要求される。

束縛条件付き固有ベクトル法[1]（EVC: Eigenvector method with constraints）は、固有ベクトル法（EV:Eigenvector method またはSVD:Singular Value Decomposition methodと呼ばれる）に束縛条件を付けて、固有ベクトル法が持つグローバルな軌道補正に厳密なローカル軌道補正の機能等を加えられる柔軟性の高い軌道補正方法である。既に、蓄積リング型放射光源であるPFとPF-ARリングの軌道補正に適用し、期待された結果を得ている[2]。本発表では、この方法をERLの軌道補正に応用し、コンパクトERLでシミュレーションを行った結果を報告する。

２．束縛条件付き固有ベクトル法

2.1 原理

ビーム位置モニタ（BPM）で測定された軌道歪み$\vec{x}$を補正電磁石の蹴り角$\vec{\theta}$で軌道補正する場合、補正後の軌道$\vec{\Delta}$は次のように表せる。

$$\vec{\Delta} = R\vec{\theta} + \vec{x}. \quad (1)$$

ここで、$\vec{x}$, $\vec{\theta}$の次元をM, Nとすると、Rは$M\times N$の応答行列である。今、束縛条件が次式で与えられるものとする。

$$\vec{C_i}^T \cdot \vec{\theta} + z_i = 0 \;(\, i = 1, 2\cdots, N_c \,), \quad (2)$$

ここで、上付きのTは転置行列もしくはベクトルを表し、z_iは$\vec{\theta}$の要素に依存する任意のパラメータである。また、N_cと$\vec{C}_i^{\,T}$は束縛条件の数とz_iと$\vec{\theta}$の応答行列である。補正後の軌道$\vec{\Delta}$の大きさ（ノルム）は、束縛条件(2)の下で最小もしくは十分に小さいことが求められる。ラグランジェの未定乗数法により、次式で表されるSを導入する。

$$S = \frac{1}{2}\left(R\vec{\theta} + \vec{x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N_c} \mu_i \left(\vec{C_i}^T \cdot \vec{\theta} + z_i\right) \quad (3)$$

Sについて$\vec{\theta}$と$\vec{\mu}$の全ての要素に関する微分がゼロになるようにすると、次式が得られる。

$$A\vec{\theta} + R^T\vec{x} + C^T\vec{\mu} = 0 \quad (4)$$

$$C\vec{\theta} + \vec{z} = 0 \quad (5)$$

ただし、

$$A = R^T R \quad (6)$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N_c} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{N_c} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$C = \begin{pmatrix} \vec{C_1}^T \\ \vec{C_2}^T \\ \vdots \\ \vec{C_{N_c}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N_c 1} & C_{N_c 2} & \cdots & C_{N_c N} \end{pmatrix} \quad (8)$$

である。式(5)は束縛条件である式(2)と等価である。

[1] E-mail: nakamura@issp.u-tokyo.ac.jp

これらの式から、解を求めると、

$$\vec{\mu} = P^{-1}\vec{z} - P^{-1}CA^{-1}R^{T}\vec{x} \tag{9}$$

$$\vec{\theta} = B\vec{x} - D\vec{z} \tag{10}$$

となる。尚、

$$B = (-A^{-1} + A^{-1}C^{T}P^{-1}CA^{-1})R^{T} \tag{11}$$

$$D = A^{-1}C^{T}P^{-1} \tag{12}$$

$$P = CA^{-1}C^{T} \tag{13}$$

である。行列A^{-1}は一般化された逆行列で、次のように定義される。

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^{N_v} \frac{\vec{v_i}\,\vec{v_i}^{T}}{\lambda_i} \quad (N_c \le N_v \le N). \tag{14}$$

ここで、$\lambda_i(\ge 0)$と$\vec{v}_i$は行列Aのi番目に大きい固有値とその固有ベクトルで、$\lambda_i \approx 0$の場合は式(14)の$1/\lambda_i$はゼロに置き換えられることが多い。これは、補正電磁石の蹴り角（積分磁場）が異常に大きくなることと不良BPM発生時の誤差の影響が大きくなることを避けるためである。束縛条件付き固有ベクトル法の更なる詳細は、文献[1]に述べられている。

もし、$\vec{z}$をいくつかの電子（光）ビーム位置モニタで測定した位置とし、Cを対応する応答行列だとすると、その選択されたビーム位置はこの軌道補正によって常にゼロに固定（補正）されることになる。電子ビーム位置に限定すると、式(10)は次のような簡単な形になる。

$$\vec{\theta} = G\vec{x} \quad , \tag{15}$$

ここで、Gは$N \times M$の行列である。

2.2 ERLの応答行列

ここでは、ERLの応答行列を考える。１ループのERLで、ビーム位置モニタ(BPM)で測定するビーム位置の数をMとし、補正電磁石の台数をNとする。i番目の位置とj番目の補正電磁石におけるベータトロン関数と位相をそれぞれ(β_i, ϕ_i), (β_j, ϕ_j)とすると、応答行列の要素R_{ij}は次のようになる。

$$R_{ij} = \sqrt{\frac{p_j}{p_i}}\sqrt{\beta_i\beta_j}\, sin\left(\phi_i - \phi_j\right), \quad \phi_i > \phi_j \tag{16}$$

ここでp_iとp_jはi番目のBPM位置とj番目の補正電磁石におけるビームの運動量である。ビームが２回通過する領域にあるj番目の補正電磁石は１ターン目のj番目の蹴り角に加えて、２ターン目で$(j+L)$番目の蹴り角をビームに与える。ここで、Lはループ内（入射部及びビームダンプ部は除く）の補正電磁石の数である。２回の蹴りをビームに与える補正電磁石に対する応答行列の要素は、

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \sqrt{\frac{p_j}{p_i}}\sqrt{\beta_i\beta_j}\, sin\left(\phi_i - \phi_j\right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{p_{j+L}}{p_i}}\sqrt{\beta_i\beta_{j+L}}\, sin\left(\phi_i - \phi_{j+L}\right), \\ &\qquad \phi_i \ge \phi_{j+L} > \phi_j \end{aligned} \tag{17}$$

となる。p_{j+L}, β_{j+L}, ϕ_{j+L} は、２ターン目でのj番目の補正電磁石におけるビームの運動量、ベータトロン関数と位相である。ここで、蹴り角の代わりに積分磁場をパラメータとして採用すると、補正電磁石のパラメータ値がビームの運動量に依存せずに見通しが良い。この場合、 (16)(17)に対応する応答行列の要素はそれぞれ、

$$R_{ij} = e\sqrt{\frac{\beta_i\beta_j}{p_i p_j}}\, sin\left(\phi_i - \phi_j\right), \ \phi_i > \phi_j \tag{18}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= e\sqrt{\frac{\beta_i\beta_j}{p_i p_j}}\, sin\left(\phi_i - \phi_j\right) \\ &\quad + e\sqrt{\frac{\beta_i\beta_{j+L}}{p_i p_{j+L}}}\, sin\left(\phi_i - \phi_{j+L}\right), \ \phi_i \ge \phi_{j+L} > \phi_j \end{aligned} \tag{19}$$

となる。ここで、eは電子の電荷である。

３．コンパクトERLへの応用

束縛条件付き固有ベクトル法をコンパクトERLの軌道補正に応用した。図１にそのコンパクトERLと、２３個のBPM（BPM01-BPM23）と１９台（N=19）の水平・垂直兼用の補正電磁石（COR01-COR19）の配置を示す。合流部と取出部の間にある５つのBPM（BPM01-BPM05）は２回の位置を測定するので合計で２８のビーム位置（M=28）を測定する。同様に、５つの補正電磁石（COR01-COR05）は、２度のキックをビームに与える。初期のビーム軌道歪みは、主超伝導空洞８台の設置位置誤差+1mmによって生成させ、その補正に必要な補正電磁石の積分磁場（蹴り角）を束縛条件付き固有ベクトル法で求めた。その後、求めた補正電磁石の積分磁場を加えたシミュレーションをelegant[4]を用いて行い、補正後の軌道とビームパラメータを得た。シミュレーションにはコヒーレント放射（CSR）などの非線形効果も含まれているが、低エミッタンスモードではアーク部の六極電磁石は励磁しない[3]。束縛条件としては、第１アーク部直後の長直線部にある２つのBPM（BPM13, BPM14）でビーム位置をゼロにするという条件を課した。この２つのBPM間のスペースを用いてユーザー実験が将来行われる可能性があり、より高い補正の精度や軌道の安定性が求められるためである。

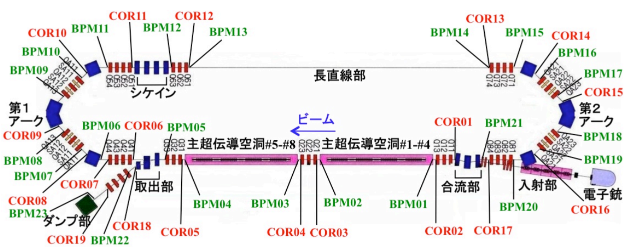

図１：コンパクト ERL の構成。軌道補正のために２３個の BPM と１９台の補正電磁石を配置した。

図２の黒線と黒丸は、低エミッタンスモードにおいて主超伝導空洞の水平設置誤差+1mmで発生させ

た軌道歪みとBPMでの変位である。軌道歪み全体のRMS及び最大変位はそれぞれ8.43mm, 34.8mmで、BPM設置場所でのRMS及び最大変位はそれぞれ7.85mm, 26.6mmである。図３は軌道補正の結果で、使用した固有ベクトルの数N_vの関数として軌道の最大変位とRMS変位を示している。全てのBPMでのRMS及び最大変位は使用する固有ベクトル数が増えると単調に減少するが、全要素を含む軌道全体での最大変位とRMS変位は、N_vが6もしくは7までは減少するが、N_v=8で増加に転じる。この理由は補正後の軌道のN_vによる形状の変化を調べると説明できる。図２に示されているように、N_vが7から8に変わると，軌道形状は顕著に変化し、BPMでの変位は減少しても全ビーム軌道の変位はむしろ増加することがわかる。これは、BPMが設置されていない主超伝導空洞及びその付近の軌道歪みに依るところが大きい。

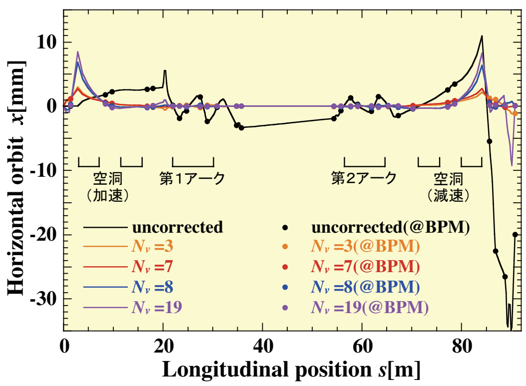

図２：空洞設置誤差による初期軌道歪みと束縛条件付き固有ベクトル法による補正後の軌道（固有ベクトル数 N_v=3, 7, 8, 19）。軌道は、合流部直後からダンプ部までを示す。丸は BPM での変位を表す。

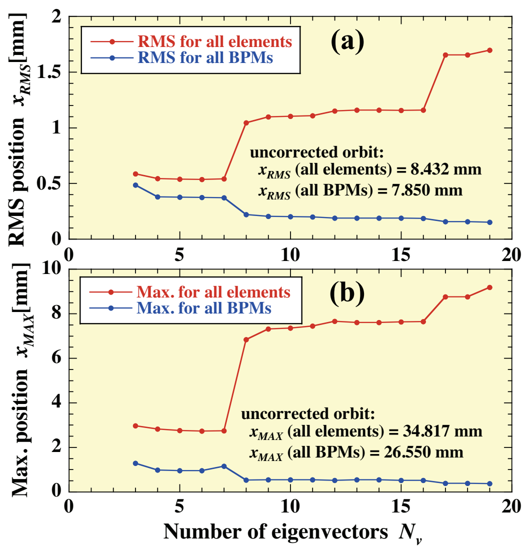

図３：補正された軌道における全 BPM 及び全要素での(a)RMS 及び(b)最大水平変位の固有ベクトル数依存性。

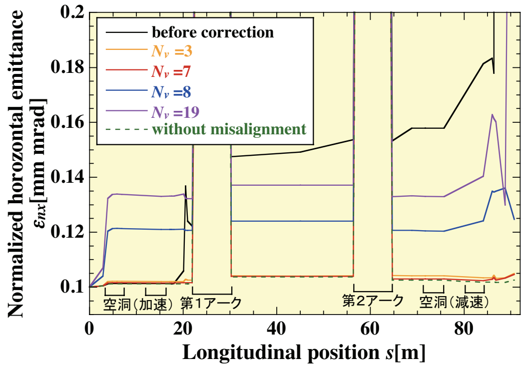

図４：補正前、補正後(N_v=3, 7, 8, 19)、設置誤差なしの場合の規格化水平エミッタンス。

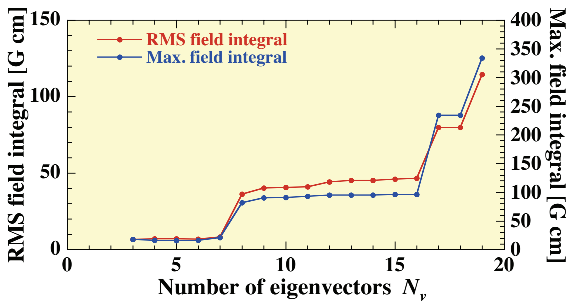

図５：軌道補正における補正電磁石の RMS 及び最大積分磁場の固有ベクトル数依存性。

このN$_v$による軌道形状の変化は、エミッタンスの増大の原因にもなる。図４に示すように、軌道補正前に加速空洞後の四極電磁石で生じていたエミッタンスの増加は、$N_v \leq 7$の軌道補正ではきれいに消えているが、$N_v \geq 8$の軌道補正ではその前の加速空洞で生じている。これは、$N_v \geq 8$では軌道形状の変化によって加速空洞で局所的に軌道歪みが大きくなり、色効果によるエミッタンス増加が起きるためである[5]。今回の場合、軌道及びエミッタンスの両方の観点から、$N_v \leq 7$での軌道補正は、$N_v \geq 8$よりも優れていると言える。また、図５の補正電磁石の積分磁場のN_v依存性を見るとわかるように、$N_v \leq 7$での軌道補正は$N_v \geq 8$の補正よりも補正電磁石への負荷も小さくて済むことがわかる。

図６に束縛条件の有る場合と無い場合について、BPM13とBPM14でのビーム位置を補正に使用した固有ベクトル数N_vの関数としてそれぞれ示す。どちらのBPMでも、束縛条件の有る場合はN_vの値に関わらず変位が非常に小さく抑えられていることがわかる。一方、図７に示すように、全体的な軌道のRMS変位と最大変位及び補正電磁石の積分磁場（RMSと最大値）については、同じN_vに対して束縛条件の有る場合と無い場合で特別に大きな差は見られなかった。これらは、束縛条件付き固有ベクトル法の大きな特長である。束縛条件を使うことでN_vを必要以上に大

きくすることなく、より精度が求められる点や領域で軌道を精密に補正することが可能である。また、それによって軌道全体の補正性能や補正電磁石への負荷に大きな影響を与えることはない。

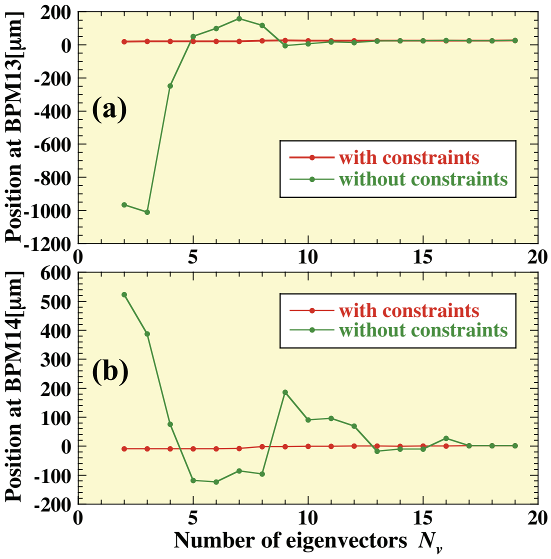

図６：束縛条件の有る場合（赤線）と無い場合（緑線）の(a)BPM13 と(b)BPM14 でのビーム位置。

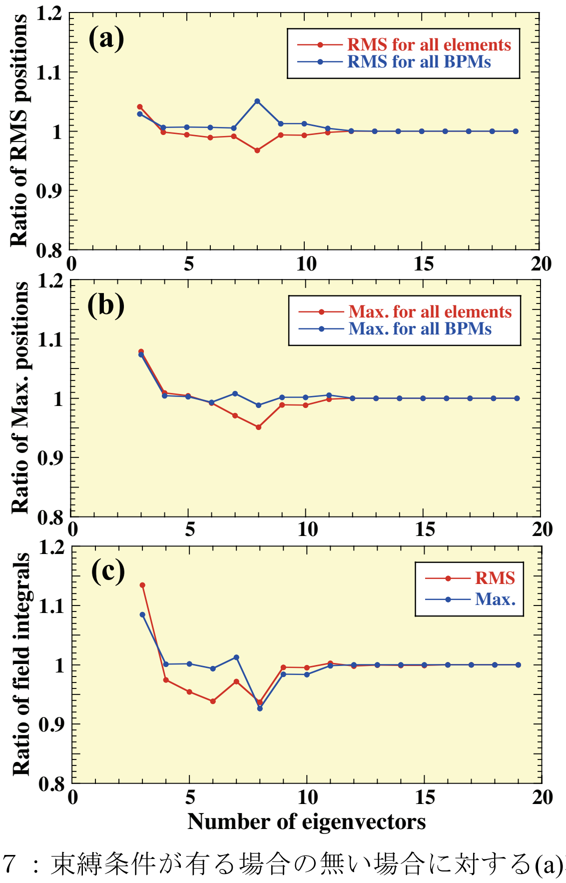

図７：束縛条件が有る場合の無い場合に対する(a)軌道の RMS 変位、(b)最大変位、(c)補正電磁石の積分磁場強度（RMS 及び最大）の比。

４．まとめ

今回のシミュレーションを通じて、束縛条件付き固有ベクトル法がERLの軌道補正にも応用できることが実証された。この方法によって、コンパクトERLの軌道歪みが全体的に補正され、同時により厳密な局所軌道補正を束縛条件によって実現できた。なお、BPMや補正電磁石の数と配置の最適化については、今後の１つの課題と言える。束縛条件付き固有ベクトル法は、応答行列の要素を変えるだけで１ループのERLだけでなく多ループを持つERLにも容易に応用できる。また、多数の光源点を持つ将来のERL光源の軌道補正や軌道の安定化にとって、非常に有効な方法になるものと期待できる。

参考文献

[1] N. Nakamura et al., Nucl. Instr. Meth. A **556** (2006) 421-432.
[2] K. Harada et al., Nucl. Instr. Meth. A **604** (2009) 481-488.
[3] T. Shiraga et al., PAC09, Vancouver, 2009.
[4] M. Borland, Phys. Rev. ST-AB **4**, 070701 (2001).
[5] N. Nakamura et al., Proceedings of IPAC10, Kyoto, 2009, pp.2314-2316.