# DEVELOPMENT OF AN ENVELOPE SIMULATION MODEL FOR A LOW-EMITTANCE SPACE-CHARGED BEAM

Kazuaki Togawa[#, A)], Yasuyuki Tajiri[B)], Toru Hara[A)], Hitoshi Tanaka[B)]
[A)] RIKEN/SPring-8
Kouto 1-1-1, Sayo, Hyogo 671-5148, Japan
[B)] JASRI/SPring-8
Kouto 1-1-1, Sayo, Hyogo 671-5198, Japan

*Abstract*

In order to perform efficient beam tuning at XFEL/SPring-8, we have started the development of a start-to-end envelope simulation code using symplectic matrices. A method of transferring a beta function at high-energy region has been well established at storage rings etc., however, there was no efficient model to simulate it for a space-charged beam at low-energy region. In this paper, we propose a new method to simulate an envelope of the low-emittance space-charged beam.

# 低エミッタンス空間電荷ビームのエンベロープ計算模型の開発

## 1. 序章

SPring-8 キャンパスでは、2011 年のビーム運転開始を目指して X 線自由電子レーザー研究施設（XFEL/SPring-8）の建設が行われている[1]。XFEL 光を長期間安定に発生させるためには、加速器全体に渡って電子ビームのパラメータを最適化する必要がある。XFEL/SPring-8 では、効率良くビーム調整を行うことを目的として、運転中の電子ビームのエンベロープやピーク電流の様子を、電子銃からアンジュレータ出口までリアルタイムで可視化するシミュレーションコードの開発を開始した。

空間電荷効果が無視できる超相対論領域におけるエンベロープ計算の手法は、これまでに蓄積リング等に於いて十分に確立されており、エネルギーが変化する線形加速器への適応も可能となっている[2]。一方、電子銃から数十 MeV の空間電荷効果が支配的なエネルギー領域の解析には多粒子の軌道計算コードを使用するのが一般的であるが、この計算結果からエンベロープを抽出する方式は非常に長い時間と手間を要するため、目的とするリアルタイム解析には適さない。

XFEL/SPring-8 では、$CeB_6$ 熱電子銃から発生した均一密度の低エミッタンスビームを速度変調により段階的にバンチ圧縮する方式を採用しているため、レーザー増幅に寄与するバンチ中心部は空間電荷力の線形性が十分に保たれていると考えられる[3]。この特性に着目し、低エネルギー領域における空間電荷力を、発散力を与える線形の外場に置き換え、symplectic 行列によりベータ関数を転送させる計算模型を考案した。この手法が確立すると、電子銃からアンジュレータまで一気通貫でベータ関数を転送できるため、レーザー出力に対する各加速器パラメータの感度等を迅速に調べることが可能となる。

本稿では、低エミッタンス空間電荷ビームのエンベロープ模型について、その原理と計算機による検証結果について報告する。

## 2. 低エミッタンス空間電荷ビームの線形性

エミッタンスが十分に小さく、ビームエネルギーが低い場合、径方向の運動は空間電荷効果が支配的となる。エミッタンスが空間電荷ビームの運動に及ぼす影響は、以下に示すエンベロープ方程式を用いて定量的な評価を行うことができる[4]。

$$\frac{d^2 r_m}{dz^2} + K(z) r_m - \frac{2I}{(\bar{\beta}\bar{\gamma})^3 I_A}\frac{1}{r_m} - \frac{(4\varepsilon_{n,rms})^2}{(\bar{\beta}\bar{\gamma})^2 {r_m}^3} = 0$$

ここで、$r_m$ はビーム半径、第２項は線形の外場による項で、磁気レンズ等による収束項を表す。第３項は空間電荷による発散項を表し、$I$ はビーム電流、$I_A$ は Alfven 電流（17 kA）、$\bar{\beta}$ は光速に対する電子の速度、$\bar{\gamma}$ は Lorenz 因子である。第４項はエミッタンスによる見かけ上の発散項である（ここでは規格化 rms エミッタンス、$\varepsilon_{n,rms}$ を使っていることに注意）。

ドリフト空間と磁気レンズで構成される周期構造の中を飛行する空間電荷ビームのエンベロープを図１に示す。ビームエネルギーは 500 keV、電流値は 1 A とした。また、磁気レンズの強度は、エミッタンスがゼロの場合に周期的なエンベロープが得られるように設定した。

図１より、規格化エミッタンスが 5π mm mrad 程度より大きい場合は、エミッタンスがエンベロープに与える影響が顕著であるが、1π mm mrad 以下と十分に小さいレベルであれば、その影響を無視できることが分かる。

このように、低エミッタンスビームの発散が空間電荷効果だけで決まることから、電流密度が一様で

[#] togawa@spring8.or.jp

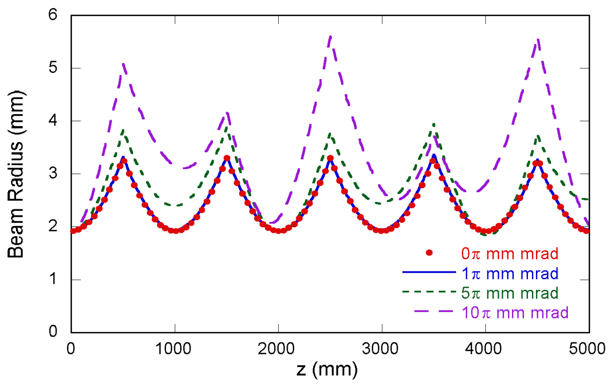


図１：空間電荷ビームのエンベロープ

あれば、発散力は常に線形性を保持していることが保証される。そこで、空間電荷力を外場である線形の軸対称発散レンズに置き換えることを考える。ドリフト空間において層流ビーム内を飛行する電子の軌道方程式は、

$$\frac{d^2r}{dz^2}-\frac{2I}{(\bar{\beta}\bar{\gamma})^3 I_A {r_m}^2}r=0$$

と表される。エネルギー、電流値、ビーム半径は $z$ の関数であるので、第２項の係数をまとめて $K(z)$と置くと、この式は Hill 方程式となる。$K(z)$が一定と見なせる微小区間$\Delta z$ に分割すれば、四極電磁石の発散と同じ symplectic 行列（$M_{SC}$）を作ることができる。

$$M_{SC}=\begin{pmatrix}\cosh\left(\Delta z\sqrt{|K(z)|}\right) & \frac{1}{\sqrt{|K(z)|}}\sinh\left(\Delta z\sqrt{|K(z)|}\right)\\ \sqrt{|K(z)|}\sinh\left(\Delta z\sqrt{|K(z)|}\right) & \cosh\left(\Delta z\sqrt{|K(z)|}\right)\end{pmatrix}$$

以降、$M_{SC}$を空間電荷行列と呼ぶことにする。

さて、実際に取り扱うビームは短バンチビームであるので、厳密には縦方向の運動も含めた議論が必要である。但し、ビーム径に対してバンチ長が長い円柱型のビームであることと、エネルギーやピーク電流が緩やかに変化することから、この模型ではバンチの中心部分が連続ビームとして扱えると仮定した。また、縦方向と横方向の運動が独立に扱えるとして、エネルギーとピーク電流の変化については１次元シミュレーションにより求めることにした[5]。

## 3.　多粒子軌道計算との比較検証

提唱した空間電荷ビーム模型を検証するために、磁気レンズと加速管で構成される単純な加速器を想定し、多粒子軌道計算との比較を行った。多粒子軌道計算には計算コード PARMELA を使用した。構成機器のレイアウトを図２に、ビームの初期条件と加速器パラメータを表１と表２にそれぞれ示す。

磁気レンズについては、薄肉近似で求めた symplectic 行列（$M_{ML}$）を用いた。

$$M_{ML}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/f & 1\end{pmatrix},\quad 1/f=\left(\frac{e}{2\bar{\beta}\bar{\gamma}m_e c}\right)^2\int {B_z}^2 dz$$

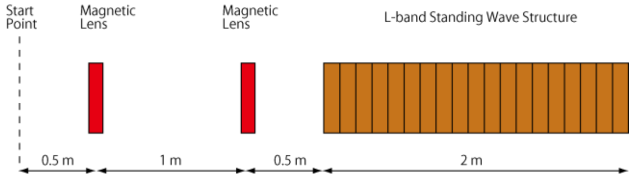


図２：模型検証のための加速器レイアウト

表１：ビームの初期条件

| | |
|---|---|
| エネルギー | 500 keV |
| ピーク電流 | 1 A |
| 半径 | 1.93 mm |
| 規格化エミッタンス（rms） | 0.6π mm mrad |
| Twiss Parameter | |
| $\alpha_0$ | 0.00 |
| $\beta_0$ | 2.65 m |
| $\gamma_0$ | 0.38 m$^{-1}$ |

表２：加速器パラメータ

| | |
|---|---|
| 磁気レンズ | |
| ピーク磁場 | 585 Gauss |
| f 値 | 0.327 m @500 keV |
| L-band 定在波加速管 | |
| 周波数 | 1428 MHz |
| モード | π-mode |
| セル数 | 19 |
| ピーク電界 | 14.6 MV/m |

定在波空洞については、まず、加速電場が一定と見なせる程度まで z 方向を細分割して、次の近似的な軌道方程式を導出した。

$$\begin{pmatrix}r_1\\ r_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_0\\ r_0'\end{pmatrix}=M_{CAV}\begin{pmatrix}r_0\\ r_0'\end{pmatrix}$$

$$M_{11}=1-\frac{C2\Delta z}{C1}\ln\left(\frac{p_{z0}+C1\Delta z}{p_{z0}+0.5C1\Delta z}\right)$$

$$M_{12}=\frac{p_{z0}}{C1}\left[\ln\left(\frac{p_{z0}+C1\Delta z}{p_{z0}}\right)-\frac{C2\Delta z}{C1}\ln\left(\frac{p_{z0}+C1\Delta z}{p_{z0}+0.5C1\Delta z}\right)\ln\left(\frac{p_{z0}+0.5C1\Delta z}{p_{z0}}\right)\right]$$

$$M_{21}=-\frac{C2\Delta z}{p_{z0}+C2\Delta z}$$

$$M_{22}=\frac{p_{z0}}{p_{z0}+C1\Delta z}+\frac{C2\Delta z p_{z0}}{C1(p_{z0}+C1\Delta z)}\ln\left(\frac{p_{z0}+0.5C1\Delta z}{p_{z0}}\right)$$

$$C1=\frac{eA\cos(\omega t_0+\phi)}{\bar{\beta}_0 c}f(z_0)$$

$$C2=\frac{eA}{2c}\left[\frac{f'(z_0)}{\bar{\beta}_0}\cos(\omega t_0+\phi)-\frac{\omega f(z_0)}{c}\sin(\omega t_0+\phi)\right]$$

ここで、添字の 0 は区間入口、1 は区間出口のパラメータであることを示し、$p_z$ は運動量、$A$ は空洞のピーク電場、$f(z)$は空洞電場の分布関数である。また、プライムは $z$ に関する１回微分を表す。$M_{CAV}$は加速場を取り扱っているので symplectic とはならず、そのままでは使用することができない。しかし、$R=\sqrt{\bar{\beta}\bar{\gamma}}r$ 、 $R'=\sqrt{\bar{\beta}\bar{\gamma}}r'$ の変数変換を施して $(R,R')$

座標系で表した行列、$\sqrt{\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1/\bar{\beta}_0\bar{\gamma}_0}M_{CAV}$ は symplectic となり、ベータ関数の転送行列として使用することが可能となる。加速場におけるベータ関数の取扱いについての詳細は論文にまとめており、現在投稿中であることを報告しておく[2]。

symplectic 行列による空間電荷ビームのエンベロープ計算は、次に述べる条件で行った。

1）z 軸方向を細分割し、区間ごとに symplectic 行列を作る。区間内では $r_m$ が一定であるとする。
2）ビーム電流値は常に一定であるとする。バンチャー空洞による積極的なバンチ圧縮を行なっておらず、また、加速管における位相スリップの効果も小さいため。
3）エネルギーが一定のドリフト空間では、空間電荷行列として $M_{SC}$ を用いる。
4）加速管については、加速場の効果と空間電荷効果を分離して計算する。加速場については symplectic 行列 $\sqrt{\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1/\bar{\beta}_0\bar{\gamma}_0}M_{CAV}$ を用いる。空間電荷効果については、実効的な発散力を与える薄肉近似した空間電荷行列を各加速場の行列の間に挿入する。

さて、空間電荷行列を決定するためには各区間の $r_m$ を求めなければならないが、以下に述べる２つ方式を提案し、計算結果の比較を行った。

A）エミッタンスがゼロの層流ビームの軌道方程式を解いて、z 軸に沿ったビーム半径 $r_m$ の分布を求めて、あらかじめ空間電荷行列を加速器に沿って配置する。

B）前の区間から転送されたベータ関数より、

$$r_m = \sqrt{\beta\left(\frac{4\varepsilon_{n,rms}}{\bar{\beta}\bar{\gamma}}\right)}$$

の関係式を使って該当する区間の $r_m$ を求め、逐次空間電荷行列を決定していく。

ケースＡの計算結果を図３に示すが、この方式では加速管の中央付近においてベータ関数が発散してしまっていることが分かる。これは、層流ビームを使って空間電荷行列のパラメータである $r_m$ を求めていることが原因で、$r_m$ がゼロ近傍にまで収束され、加速により減衰するはずの空間電荷力が焦点において爆発的に増大したためである。このことは、空間電荷が支配的な低エネルギー領域からエミッタンスが支配的になる高エネルギー領域へベータ関数が滑らかに接続されないことを示している。滑らかに接続するためには、ある場所から空間電荷効果を取り除く等の処置が必要となってくる。また、PARMELA の計算結果と比較して、前半部分において徐々にベータ関数がずれてしまっているが、この原因については明らかとなっていない。

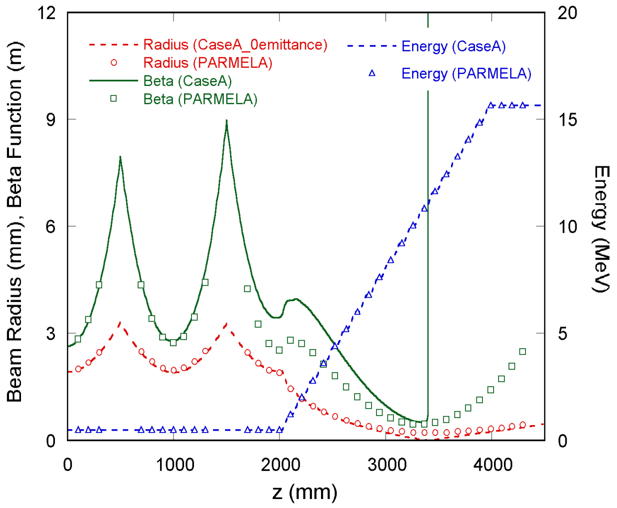


図３：空間電荷ビームのベータ関数（ケースＡ）

次にケースＢの計算を行った。結果を図４に示す。ケースＡで見られたベータ関数の発散問題は解消されて、滑らかにベータ関数が転送され、PARMELA の結果と非常に良い一致を示していることが分かる。ベータ関数の発散が生じなかったのは、逐次ベータ関数からビーム半径を導出しているため、空間電荷が減衰してビームが収束される場合でも、エミッタンスで決まるビーム径より小さくならず、空間電荷効果の発散が生じないためである。

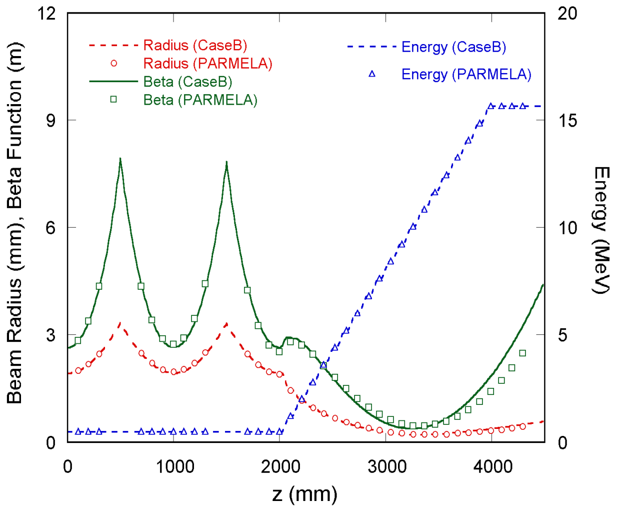


図４：空間電荷ビームのベータ関数（ケースＢ）

## 4. まとめと今後の指針

電子銃からアンジュレータまで一気通貫でベータ関数を転送するために、低エネルギー領域における空間電荷ビームの模型を提案した。低エミッタンス空間電荷ビームの線形性に着目して、空間電荷力を外場の発散レンズと見なして symplectic 行列を作り、単純な加速器を想定してベータ関数を転送した結果、

多粒子軌道計算との良い一致を得ることができた。
　今後、バンチャー空洞によるバンチ圧縮の効果も取り入れ、実機と同じ条件で比較検証を行う等、より確実に模型の検証を進めていく予定である。

## 参考文献


[1] T. Shintake, "X 線自由電子レーザーの進展", 本学会プロシーディングス
[2] T. Hara *et al.*, "Transverse Envelope Analysis for Accelerating Relativistic Electron Beams in a Linear Accelerator as a Photon Source", submitted for publication.
[3] T. Shintake *et al.*, Nat. Photon. **2**, 555 (2008)
[4] Martin Reiser, "Theory and Design of Charged Particle Beams", A Wiley-Interscience Publication, JOHN WILEY & SONS, INC., New York, 1994
[5] H. Tanaka *et al.*, "XFEL/SPring-8 のバンチ圧縮性能に及ぼす RF 機器変動の影響評価", Proceedings of the 4th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan and the 32nd Linear Accelerator Meeting in Japan (August 1-3, 2007, Wako Japan) p.613