

CORRECTION OF OFF-MOMENTUM DYNAMIC APERTURE

Yoshito Shimosaki

JASRI/SPring-8, Hyogo 679-5198, Japan

Abstract

Nonlinear resonances of off-momentum particles have been examined to enlarge a dynamic aperture in a lattice design. Optimum sextupole magnetic fields are derived by an isolated resonance Hamiltonian to correct nonlinear resonances of both on-momentum and off-momentum particles.

オフモーメントム粒子に関するダイナミックアパーチャー補正

1. はじめに

加速器高度化に伴い円形加速器のラティス設計を行う場合、安定なビーム入射やビーム寿命を得るためには、オンモーメントム粒子及びオフモーメントム粒子に関するダイナミックアパーチャーを、要請される値まで拡張する必要がある。

放射光施設における低エミッタンスラティス例として、SPring-8 蓄積リング（“9 ユニットセル + 2 マッチングセル + 30m 長直線部”を one super-period とする 4 回対称で構成される）で提案された 3-bend ラティス及び 4-bend ラティスに関するラティスパラメータを表 1 に、ユニットセルのラティス関数を図 1 に示す[1]。3-bend ラティスは、ユニットセルの中に結合型偏向電磁石が 3 台、4-bend ラティスは通常の偏向電磁石が 4 台、配置される。

ラティスの低エミッタンス化を行う場合、放射励起に伴うエミッタンス増大を抑える為に、一般に分散関数を低く抑える必要が有る（図 1(a)及び(b)を参照）。そこで分散関数を抑える為により強い四極磁場が必要となり、これに伴いナチュラルクロマティシティが増大する。上述した低分散関数化の為、ナチュラルクロマティシティを補正する為により強い六極磁場が必要となり、非線形共鳴などが誘起され、ダイナミックアパーチャーがより狭くなる傾向が有る。

表 1 ラティスパラメータ

	3-bend	4-bend
Natural emittance @ 6GeV (nmrad)	0.43	0.16
Effective emittance @ 6GeV (nmrad)	0.54	0.18
Betatron tune	(61.15, 26.41)	(85.15, 30.35)
Natural chromaticity	(-212, -65)	(-206, -108)

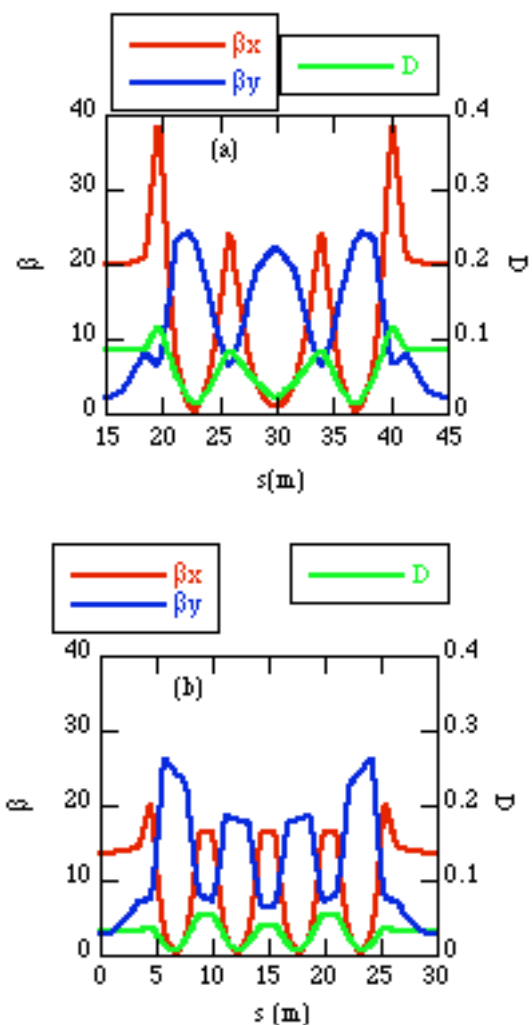


図 1 低エミッタンスラティスのユニットセル。(a) 3-bend ラティスと(b) 4-bend ラティス。

安定なビーム入射やビーム寿命を得る為に、非線形共鳴等を補正し、ダイナミックアパーチャーを拡張する必要がある。特にオフモーメントム粒子に関して、分散関数により六極磁石のオフセンターを通るので、六極磁場のフィードダウン項からの寄与を

#shimosaki@spring8.or.jp

考慮する必要がある。これまで SPring-8 で使用されてきた軌道解析コード CATS [2]や PATRASH[3]では、オンモーメントム粒子に関する非線形共鳴のみ着目しており、オフモーメントム粒子に関する非線形共鳴についてフィードダウン項からの寄与は考慮されていなかった。ここで PATRASH を用いてオンモーメントム粒子の非線形共鳴補正に必要な六極磁場を解析し、軌道計算コード CETRA[4]に入力してトラッキングで求めたダイナミックアパーチャーの例を図 2 に示す (図 2、及び後述の図 3 では、1000 ターン計算後、生き残った粒子についてプロットしている。放射光によるダンピング及びシンクロトロン振動は考慮されていない。図 5 では放射光によるダンピング及びシンクロトロン振動を考慮し、4000 ターン計算した)。オフモーメントム粒子に関する非線形共鳴はこれらコードでは考慮されていないため、特に 3-bend ラティスではオフモーメントム粒子の非線形共鳴が十分に補正できておらず、オンモーメントム粒子のダイナミックアパーチャーに比べオフモーメントム粒子のダイナミックアパーチャーは歪な形となっている。

そこでオンモーメントム粒子及びオフモーメントム粒子に誘起される非線形共鳴を孤立共鳴ハミルトニアン[3, 5]を用いて同時に補正する手法を開発中である[6]。これらの進捗について報告する。

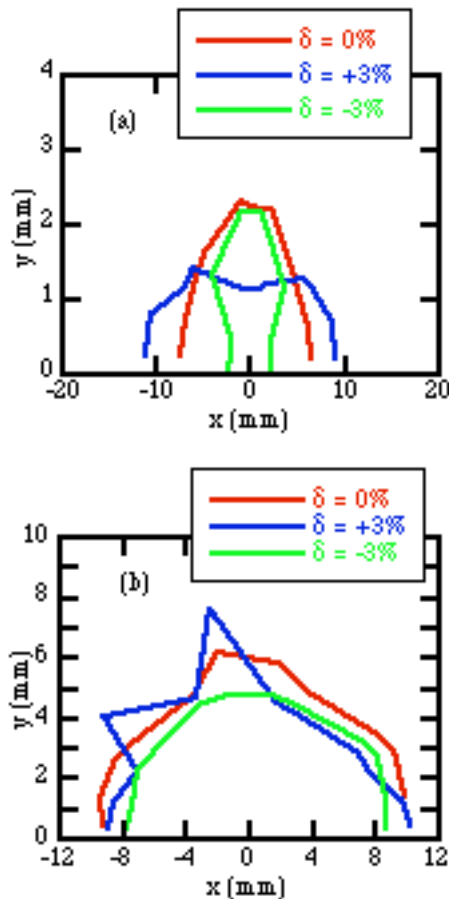


図 2 オンモーメントム粒子の非線形共鳴のみ補正した場合のダイナミックアパーチャー。(a) 3-bend

ラティスと(b)4-bend ラティス。

2. 孤立共鳴ハミルトニアン

オフモーメントム粒子のベータatron振動に関するハミルトニアンを

$$H(x, y, p_x, p_y; s) = H_0(x, y, p_x, p_y; s) + U(x, y; s)$$

$$U(x, y; s) = \frac{(1-\delta)}{2} \sum_{j=1}^N g_{1,j} d_j \delta(s-s_j) \left(\frac{1}{3} x^3 - xy^2 \right) - \frac{\delta(x^2 - y^2)}{2} \{ K_x^2(s) + g_0(s) \} + \frac{\delta(x^2 - y^2)}{2} \eta(s) \sum_{j=1}^N g_{1,j} d_j \delta(s-s_j) + \dots$$

で定義する。ここで H_0 は無摂動時のハミルトニアン、 K は偏向電磁石曲率、 g_0 は四極磁場係数、 g_1 は六極磁場係数、そして d_j と s_j はそれぞれ j 番目の六極磁石の有効長とリング内位置である。六極磁石については簡単のため薄肉近似を行った。ここで作用角変数

$$q = \sqrt{2I_q \beta_q(s)} \cos(\varphi_q + \psi_{0,q}), \quad \psi_{0,q} = \int \frac{ds}{\beta_q} - Q_q \theta$$

及び独立変数 $s = R_0 \theta$ を用いて正準変換する[3]。ただし q は x または y 、 Q はチューン、 R_0 はリングの平均半径である。正準変換後のハミルトニアンについて時間平均をとると、非線形共鳴を表す孤立共鳴ハミルトニアンを得る[5]。孤立共鳴ハミルトニアンに出てくる非線形共鳴の内、六極磁場がオフモーメントム粒子に誘起するものを表 2 に示す。

表 2 六極磁石がオフモーメントム粒子に誘起する非線形共鳴

分散関数に依存しない共鳴	$Q_x \sim \text{int.}$ (I_y に依存しない型)
	$Q_x \sim \text{int.}$ (I_y に依存する型)
	$3Q_x \sim \text{int.}$
	$Q_x \pm 2Q_y \sim \text{int.}$
分散関数に依存する共鳴	$Q_x \sim \text{int.}$
	$2Q_x \sim \text{int.}$
	$2Q_y \sim \text{int.}$

例えば、分散関数に依存する共鳴するのうち $2Q_y \sim \text{int.}$ に関する非線形共鳴ポテンシャルは

$$\langle U_{(2nd)y}(\psi_x, \psi_y, I_x, I_y; \theta) \rangle = \delta I_y c_{2ndy}(n) \mathbf{k} \cos(3\psi_y - n\theta)$$

$$\mathbf{c}_{2ndy}(n) = (c_{2ndy}(n,1) \quad c_{2ndy}(n,2) \quad \dots \quad c_{2ndy}(n,N))$$

$$c_{2ndy}(n,j) = -\frac{d_j}{8\pi^2 R_0} \eta(\theta_j) \beta_x(\theta_j) \cos\{n\theta_j + 2\psi_{0,y}(\theta_j)\}$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{(B\rho)} \begin{pmatrix} B_1'' \\ B_2'' \\ \vdots \\ B_N'' \end{pmatrix}$$

となる (sin に関する項は省略した)。他の共鳴についても同様で、共鳴ポテンシャルの係数 \mathbf{c} は六極磁場係数に対し線形の関係で与えられる [6]。

3. 非線形共鳴補正

非線形共鳴補正の手法について、ここではハーモニクス法を採用し、表 2 であげられる非線形共鳴の係数 \mathbf{c} が 0 に近づくように、六極磁場を調整した。非線形共鳴補正の為に分散関数のある位置で六極磁場を調整すると、クロマティシティの値も変化するので、非線形共鳴補正とクロマティシティ補正は同時に行う必要がある。線形クロマティシティ補正の式は六極磁場に対して線形となるので、「オンモーメントム・オフモーメントム粒子に誘起される非線形共鳴を補正する為の六極磁場係数」および「線形クロマティシティ補正のための六極磁場係数」を

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\xi_x} \\ \mathbf{c}_{\xi_y} \\ \mathbf{c}_{int1}(n) \\ \mathbf{c}_{3rd}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{int3}(n) \\ \mathbf{c}_{2nd-x}(n) \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1'' \\ B_2'' \\ \vdots \\ B_N'' \end{pmatrix} = (B\rho) \begin{pmatrix} \Delta\xi_x \\ \Delta\xi_y \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \vdots \end{pmatrix}$$

を解く事により求めた。ここで $\varepsilon \ll 1$ 、 $\Delta\xi$ は線形クロマティシティの目標値に関する定数である。

図 2 と同じラティスについて、「オンモーメントム粒子に誘起される非線形共鳴」と「オフモーメントム粒子に誘起される非線形共鳴」を同時に補正した場合のダイナミックアパーチャーを図 3 に示す。オンモーメントム粒子の非線形共鳴のみ補正した場合 (図 2) に比べ、オンモーメントム・オフモーメントム粒子の非線形共鳴を同時に補正した場合 (図 3) の方が、オフモーメントムダイナミックアパーチャーが広がった。

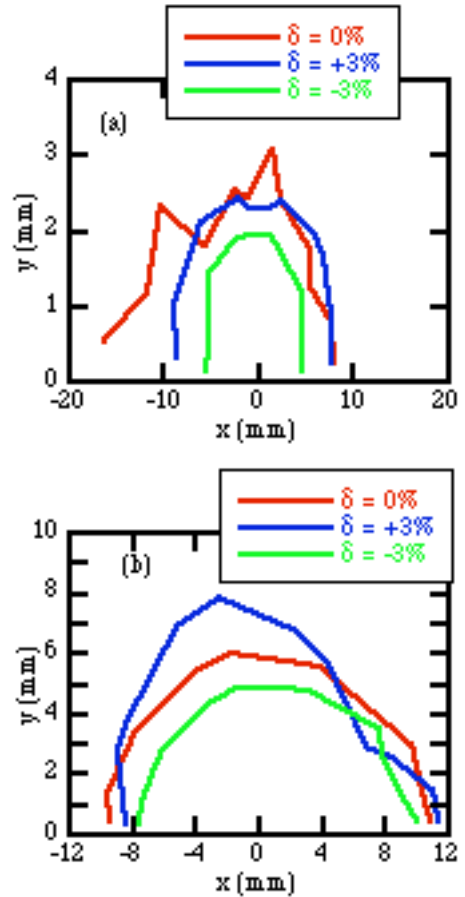


図 3 オンモーメントム/オフモーメントム粒子の非線形共鳴を同時補正した場合のダイナミックアパーチャー (a) 3-bend ラティスと(b)4-bend ラティス。

4. 2次クロマティシティ補正

運動量偏差に伴うチューンシフト及び閉軌道を

$$\Delta Q = \xi_1 \delta + \xi_2 \delta^2 + \dots$$

$$\Delta q = \eta_1 \delta + \eta_2 \delta^2 + \dots$$

と定義する[7, 8]。

上ではクロマティシティについて線形項まで考慮したが、低エミッタンスラティスでは 2 次クロマティシティも無視できない量、存在する。2 次分散関数 η_2 と 2 次クロマティシティ ξ_2 についても、六極磁石で補正可能である。そこで 2 次クロマティシティ補正によりダイナミックアパーチャー拡張可能か調べる為に、非線形共鳴補正及び線形クロマティシティ補正が可能な「範囲内」で、同時に 2 次クロマティシティも補正するよう、上述した非線形共鳴補正用のマトリックスに 2 次クロマティシティ補正を加えたアルゴリズムを開発中である。

計算例として、4-bend ラティスについて、2 次ク

ロマティシティ補正前後の、チューンの運動量偏差依存性を図 4 に、ダイナミックアパーチャーを図 5 に示す（ここでは放射光を含むダンピング、及びシンクロトン振動も考慮した。4000 ターン計算を行い、生き残った粒子をダイナミックアパーチャーとしてプロットしている。中心部分の空白について、計算時間節約のためビームコア部の計算は省略した）。今回の調整では、2 次クロマティシティが(214, 85) から(201, 94)へ変化し（非線形共鳴補正及び線形クロマティシティ補正が可能な「範囲内」で調整を行ったので、今回、劇的には変化しなかった）、 x 方向にチューンスプレッドが減少した。ダイナミックアパーチャーについて、特に y 方向に広がるという結果を得たが、これが 2 次クロマティシティ補正によるものであるかどうかについては、更なる調査が必要である。

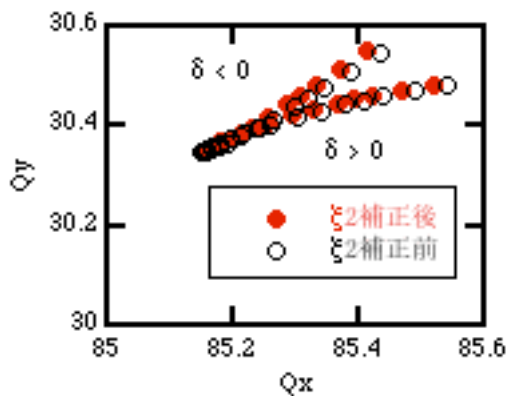


図 4 2 次クロマティシティ補正前後のチューンの運動量偏差依存性。横方向エミッタンスは 0 を仮定している。

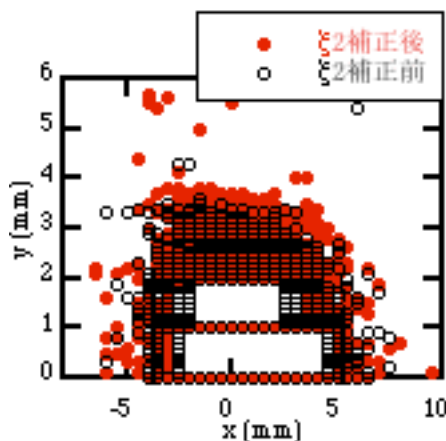


図 5 2 次クロマティシティ補正前後のダイナミックアパーチャー ($\delta = +3\%$)。

5. サマリー

加速器高度化に伴い、安定なビーム入射やビーム寿命を得る為に、オンモーメントム粒子及びオフ

モーメントム粒子のダイナミックアパーチャーを必要な値まで確保する必要がある。そのため、オンモーメントム粒子及びオフモーメントム粒子に誘起される非線形共鳴を、孤立共鳴ハミルトニアンを用いて同時に補正する手法を開発中である。ここでは低エミッタンスラティスに着目し、六極磁石により誘起される非線形共鳴の補正を行った。SPring-8 で提案された低エミッタンスラティス（3-bend ラティス、4-bend ラティス）に適用し、オフモーメントムダイナミックアパーチャーを拡張できることを確認した。

非線形クロマティシティ補正手法及びその効果については、引き続きスタディを行う予定である。

参考文献

- [1] K. Soutome et al., “Design of Modified Lattice of Long Straight Section in the SPring-8 Storage Ring”, Proc. of IPAC10, Kyoto (2010), THPD090.
- [2] R. Nagaoka, K. Yoshida and M. Hara, NIM A 9 (1991).
- [3] Y. Shimosaki and K. Takayama, Phys. Rev. E 68, 036503 (2003).
- [4] “Racetrack” based tracking code. J. Shimizu.
- [5] Y. Shimosaki and K. Takayama, Phys. Rev. E 62, 2797 (2000).
- [6] Y. Shimosaki, 2nd Workshop on Nonlinear Beam Dynamics in Storage Rings (Oxford, Nov. 2-4, 2009).
- [7] H. Tanaka et al., NIMA 431 (1999), 396-408.
- [8] M. Takao, PRE 72, 046502 (2005).
- [9] M. Cornacchia and K. Halbach, NIM A290 (1990) 19.