MULTICONDUCTOR TRANSMISSION-LINE THEORY WITH ANTENNA MODE IN THE SINGLE-FREQUENCY COMPLEX REPRESENTATION OF RETARDATION POTENTIAL

Kenji Sato [#,A)] Hiroshi Toki[B)]
[A)] National Institute of Radiological Sciences, 4-9-1 Anagawa, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8555 Japan
[B)] Research Center for Nuclear Physics, Osaka University, 10-1 Mihogaoka, Ibaraki-shi, Osaka, 567-0047 Japan

Abstract

We have constructed the multiconductor transmission-line theory with radiation by using the retardation potential directly from Maxwell equation. The single-frequency complex representation of the retardation potential provides naturally propagation of electric signals due to the TEM mode terms in the real part and the multipole radiation terms in the imaginary part of the complex exponential functions. The superposition of two distinct electric fields (propagation and radiation) at the surface of a resistive conductor appears as a result of the charge and current distributions in the conductor.

遅延ポテンシャルの単一周波数交流複素数表示に基づく多導体伝送線路回路理論

1. はじめに

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルをローレンス条件の下で表わしたときの電磁ポテンシャルは遅延ポテンシャルで与えられる。本論文では、電磁気現象が時間的に単一周波数で変化する交流とすると、遅延ポテンシャルは複素数で表示され、そのことから、伝送線路の内部と外部の空間での電磁ポテンシャルあるいは電磁場は、電気信号が波動として線路に沿って伝搬するときの電磁ポテンシャルあるいは電磁場と、電磁波を線路から遠方まで輻射したり吸収したりするときの電磁ポテンシャルあるいは電磁場の重ね合わせになっていると解釈出来ることを明らかにした。このとき、複素数表示された遅延ポテンシャルの実数部は電気信号の伝搬現象を表し、虚数部は電磁波の輻射・吸収現象を表すので、伝送線路に存在する真電荷と伝導電流が「源」となって、電気信号の伝搬と、電磁波の輻射・吸収の 2 種類の異なる電磁気現象が発生することになる。即ち、2 つの異なる電磁気現象が共通の真電荷と伝導電流の下で共存していることになるが、これは、従来にない新しい物理的な解釈である。

なお、多導体伝送線路の場合には、線路の間の電圧（電位差）と線路を流れる電流により表現出来る電気信号の波動の他に、多導体を流れる電流の総和がノンゼロであれば、まるで、1 本の線路にノンゼロの電流が流れているかのようにみなすことが出来、電磁波の輻射・吸収が発生すると考えて良い。この現象が、多導体伝送線路での、電気信号の伝搬と、電磁波の輻射・吸収との共存と考えて良い。

これまで発表した論文では、電気信号の伝搬と、電磁波の輻射・吸収とが共存することをオームの法則を利用して議論してはいるものの、電気信号の電磁ポテンシャルあるいは電磁場と、電磁波の輻射・吸収の電磁ポテンシャルあるいは電磁場とは独立して存在し、共存していないかのように解釈して来た。2009 年の第 6 回加速器学会年会での「多導体伝送線路のアンテナモード理論への挑戦」と題した論文[1]では、遅延ポテンシャルをこねくり回して計算してはいるが、数学的な計算技巧に終始し、電気信号の伝搬と、電磁波の輻射・吸収とが同時に発生するとはしたものの、電気信号の電磁ポテンシャルあるいは電磁場と、電磁波の輻射・吸収の電磁ポテンシャルあるいは電磁場とが共存していることは明らかには出来ていなかった。最近、クロアチアの出版社 InTech から出版されたフリーアクセス出来る本[2]の第 9 章の "Electrodynamics of Multiconductor Transmission-line Theory with Antenna Mode" と題した土岐・佐藤共著論文でも同様の取り扱いと言えないこともない。しかし、いずれの論文でも、遅延ポテンシャルを取り扱っているので、完全な間違いとは言えないが、物理的な解釈が厳密ではなく甘かったので、自ずから、それらの論文には限界があることをお断りしておきたい。このような限界を超えて新しい物理的な解釈に到達出来たのも、ひとえに、遅延ポテンシャルの単一周波数交流複素数表示を思い付いたからであることを、繰り返しになるが、強調しておきたい。

ここで新しい解釈の特徴的な例を述べておきたい。電気信号の電場と、電磁波の輻射・吸収の電場とが共存する場合、両者が重なり合った結果として生じる電場がゼロになることも考えられる。導体の中には電流が流れているにも拘わらず、導体内部の電場がゼロになると言うことになるから、導体は抵抗がゼロの完全導体であって良いことになる。

従来の電磁気学の解釈では、電気信号の電場が導体の内部に発生し、完全導体の場合には、その電場がゼロであり、当然、線路に流れる電流と平行な電

sato@rcnp.osaka-u.ac.jp

場はゼロとなる。その一方で、導体に電流が流れて、遠方まで電磁波が輻射されるとき、導体表面での平行な電場はノンゼロであることが起電力法（EMF 法）により知られていた。このとき、電気信号の伝搬においては、導体は完全導体であっても良いと言うことで、矛盾が生じている。こうした矛盾はアンテナパラドックスとして知られて来た[3,4]。しかし、異なる電磁気現象の共存により、電磁波の輻射・吸収に関係する電流に平行な電場はゼロにはならず、完全導体からでも電磁波の輻射・吸収が起きても良いことになる。従って、パラドックスは発生しないことになる。

なお、導体内部の電気信号の電場のみを考えた場合、その電場がノンゼロになるには、導体を抵抗性導体に限るとする考え方もある[1]。しかし、2 つの異なる電磁気現象の電磁場が共存するのであれば、抵抗性導体に限る必要もなくなる。その場合、導体の内表面と外表面との間の境界条件の見直しが必要になるが、本論文では、その見直しを議論する。

電磁波の輻射・吸収については、高度の参考書の、アンテナによる電磁波の輻射の章節を見ると、多重極子能率が登場している。本論文では、伝送線路でも多重極子能率が定義出来ることを明らかに出来たので、電気双極子能率に重点を置いて、紹介する。

ただし、伝送線路で多重極子能率が定義出来ることを知らなかった時代、電気単極子能率を取り扱っていたようである[6]。その場合、回路エネルギーの単位長さ当たりの変化率、即ち、損失エネルギーは、ジュール熱による負の値の項以外に、負の値と正の値とが現われた。そこで、前者を電磁波の輻射と解釈し、後者を電磁波の吸収と解釈した。その議論は、本論文からして、不十分であった可能性が高い。

なお、複素数表示された電磁ポテンシャルの実数部のみを取り扱い、電磁波の輻射・吸収の現象を無視すると、線路を伝搬する電気信号の回路理論が得られる。そのとき、各導体の磁束（ベクトルポテンシャルのこと）を、各導体の電流と誘導係数との積で重ね合わせるのと同様に、各導体の電位（スカラーポテンシャルのこと）を、各導体の電荷と電位係数の積で重ね合わせる。この理論により、従来は２導体に限られていた伝送線路の回路理論を、多導体に拡張することに成功した。2009 年の日本物理学会の英文雑誌に掲載された、”Three Conductor Transmission Line Theory and Origin of Electromagnetic Radiation and Noise”と題した論文[5]に詳しい。その論文に先立って、2008 年の第 5 回加速器学会年会にて「ノイズの発生機構：３導体伝送線路でのノーマルモードとコモンモードの結合」と題した論文[6]でも、その概要を述べている。また、ノーマルモードとコモンモードの存在に付いては集中定数回路でも示すことが出来、2006 年の”Synchrotron magnet power supply network with normal and common modes including noise filtering”と題した論文[7]で述べている。コモンモードノイズの低減方法に関しては、そこで示した対称３線回路が理解出来れば、実用上は、それで十分であり、その普及を期待しておきたい。

2. 電磁場と回路理論

2.1 指導原理：場の理論

場は必ず物質と相互作用する。場の「源」は物質である。場と物質とは相互作用を通して、場のエネルギーと物質のエネルギー、場の運動量と物質の運動量、及び、場の角運動量と物質の角運動量を、お互いに、変換する。従って、全エネルギー、全運動量、及び、全角運動量は保存する。

電磁気においては、電場と磁場の「源」は真電荷と伝導電流である。

2.2 マクスウェル方程式、連続の方程式、ローレンツ力、及び、オームの法則

マクスウェル方程式では、場を左辺に書き、物質を右辺に書くことによって、場の「源」は物質と読ませることにする。

$$div\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

$$div\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mu_0}rot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

$$rot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0 \tag{4}$$

連続の方程式は(1)と(3)とから得られる。

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+div\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{5}$$

ただし、電場と磁場を直接取り扱わない回路理論では、電荷の保存則として、(5)を、直接、重用する。

ローレンツ力は場と物質の相互作用である。

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{6}$$

この式では、電場と磁場、及び、電荷と電流だけが現われるので、場と物質の相互作用としてふさわしい。

オームの法則は、電気伝導の自由電子模型によれば、抵抗性導体中では、ローレンツ力の他に、伝導電子が物質を構成する金属イオンと衝突することで、速度に比例する摩擦力を受け、その結果、成立するとされている。しかし、現象論的な法則として、本論文では採用する。

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)=\sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{7}$$

2.3 遅延ポテンシャル

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=rot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-grad\,\phi(\boldsymbol{r},t)-\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{9}$$

で与える。さらに、ローレンス条件

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+div\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0 \qquad (10)$$

を課すと、ダランベール方程式を得る。

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r},t) \qquad (11)$$

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) \qquad (12)$$

ダランベール方程式の解は遅延ポテンシャルである。

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}d\tau'\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (13)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}d\tau'\frac{\boldsymbol{i}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (14)$$

2.4　電磁場の遅延形と境界条件

(1)、(2)、(3)、及び、(4)より、導体外部での電場と磁場のそれぞれに対して、ダランベール方程式が成立する。

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}grad\rho(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \qquad (15)$$

$$\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-\mu_0 rot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) \qquad (16)$$

電場も磁場もそれぞれの右辺を「源」として、(14)と同様に、遅延形で与えられる。遅延があると、境界の一点での電場や磁場に対して、空間分布を持つ電荷や電流の寄与が異なるため、(1)や(3)のような式を境界条件に用いることは出来ないと考えるべきである。

しかし、(2)や(4)のように、右辺がゼロで、電荷や電流を含まない式は、場と場の間の関係を与えているだけなので、境界条件に用いることが出来る。

電流が流れる方向を x 軸とし、導体内部の、しかしながら、導体表面での x 方向の電場を E_x とし、導体外部の、しかしながら、導体表面での x 方向の電場を $E_{/\!/}$ とすると、(4)より

$$E_x=E_{/\!/} \qquad (17)$$

が境界条件として得られる。

また、電流が流れる方向に対して、陪法線方向を⊗記号で表わすことにする。導体内部の、しかしながら、導体表面での陪法線方向の磁場を $B_{\otimes i}$ とし、導体外部の、しかしながら、導体表面での陪法線方向の磁場を $B_{\otimes}$ とすると、(2)より

$$B_{\otimes i}=B_{\otimes} \qquad (18)$$

が境界条件として得られる。

2.5　法線方向の境界条件の考察：遅延がない場合でさえ矛盾が発生していた理由

従来は、(1)や(3)を用いて、電場や磁場の法線方向の境界条件を与えて来た。しかし、前節では、(1)と(3)を境界条件に用いてはならないことを論じた。

何かの考え違いが生じていたことになるが、それを端的に示すために、ここでは、遅延がない場合の電場について考察しておこう。電流が流れる方向を x 軸とし、円柱座標を考え、動径方向を η としよう。空間に固定された単位ベクトルを $(\boldsymbol{e}_\eta,\boldsymbol{e}_x)$ とし、座標は (η,x) とすると、法線方向は動径方向になる。

遅延がないときのスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}d\tau'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (19)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}d\tau'\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (20)$$

と与えられる。ところで、電流が流れる方向を x 軸としたので、ベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_x\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}d\tau'\frac{i_x(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (21)$$

と書くことが出来る。電場を(9)によって計算すると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_\eta\int_{V'}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\rho(\boldsymbol{r}',t)\frac{\partial(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial\eta}\\&+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x\int_{V'}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\rho(\boldsymbol{r}',t)\frac{\partial(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial x}\\&-\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{e}_x\int_{V'}d^3x'\frac{\frac{\partial i_x(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\end{aligned} \qquad (22)$$

となる。

この式は、電荷や電流が与えられたとき、電場の x 方向成分（接線成分）と動径方向成分（法線成分）が同時に定まり、独立ではないことを示している。電磁波の輻射・吸収が起こらない場合でさえ、空間の至る所で、接線成分と法線成分が同時に定まることになる。ところが、接線成分の境界条件は(17)で与えられているから、法線成分の境界条件を別途与える必要がないことになる。

ところが、従来は、接線成分の境界条件には(3)を適用し、法線成分の境界条件には(1)を適用するとして来たので、(22)とは矛盾する。この矛盾は、電場が３成分あり、磁場が３成分あって、合計６成分あるのに対して、電磁ポテンシャルでは、スカラーポテンシャルが１成分あり、ベクトルポテンシャルが３成分あって、合計４成分で十分であることから生じている違いのようである。電場と磁場と言う物理量は適切ではないと言うことであろう。

なお、電場は、電気信号の電場と電磁波の輻射・吸収の電場の重ね合わせであるとするので、その電場に対して、(17)の境界条件を適用することになる。

2.6　電磁場計算と回路理論計算との違い

電磁ポテンシャルが適切な物理量だとしたとき、電磁場計算では、例えば、(22)のように、電磁ポテ

ンシャルの勾配や時間微分を計算する。これに対して、回路理論計算では、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの時間微分を計算し、勾配を計算することはない。これが両者の違いである。

回路理論計算では電場と磁場を直接計算することはないので、(5)の直ぐ下で述べたように、連続の方程式が大活躍する。また、ベクトルポテンシャルの時間微分は、(17)の境界条件と(7)のオームの法則を組み合わせて計算出来る構造になっている。第 3 章と第 4 章では、その手順に則って、定式化を進めている。

3. 遅延ポテンシャルの単一周波数交流複素数表示に基づく多導体伝送線路回路理論

3.1 単一周波数交流複素数表示

時間変化を $e^{-j\omega t}$ とする。このとき、(13)と(14)は

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d\tau' \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} e^{j\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d\tau'\rho(\boldsymbol{r}',t)\frac{cos\left(\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + j\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d\tau'\rho(\boldsymbol{r}',t)\frac{sin\left(\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d\tau' \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} e^{j\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d\tau\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}',t)\frac{cos\left(\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + j\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d\tau\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}',t)\frac{sin\left(\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\end{aligned} \tag{24}$$

となり、複素数で表わすことが出来る。いずれの式でも、右辺の第 2 項には純虚数 j が付くのに対して、第 1 項には付かない。そこで、第 1 項を実数部と呼び、第 2 項を虚数部と呼ぶことにする。ただし、電荷や電流そのものは複素数であるから、ここで言う実数部と虚数部そのものは実数に限らないことに注意が必要である。

第 1 項において、余弦関数の値を1と置くと、遅延がないときの(19)及び(20)に一致する。従って、第 1 項は電気信号の伝搬の電磁ポテンシャルあるいは電磁場を表す。第 2 項は遅延ポテンシャルにしてはじめて生じた項であり、従って、電磁波の輻射・吸収の電磁ポテンシャルあるいは電磁場を表す。

ところで、上に述べたように、(23)と(24)の電荷と電流は実数と言う訳ではなく、複素数である。第 2 項には純虚数 j が係数となっているので、第 1 項の電荷や電流の位相を 90 度回転させる。このような機構で、2 種類の異なる電磁気現象の電磁ポテンシャルあるいは電磁場が重ね合わされることになる。

3.2 多導体伝送線路回路理論の基本方程式

太さがあり抵抗がある円形断面の導体で、x 軸方向に長さが同じ l で、N 本 $(i=1,2,\cdots,N)$、平行に並んだ伝送線路を考える。各導体の電荷を $Q_i(x,t)$ とし、電流が $I_i(x,t)$ とするとき、各導体の、導体外部の、しかしながら、導体表面でのスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを、それぞれ、$\phi_i(x,t)$ と $A_i(x,t)$ とする。このとき、(23)と(24)より

$$\begin{aligned}\phi_i(x,t) &= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' \frac{Q_j(x',t)cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d_{ij}{}^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d_{ij}{}^2}} \\ &+ j\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' \frac{Q_j(x',t)sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d_{ij}{}^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d_{ij}{}^2}}\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}A_i(x,t) &= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' \frac{I_j(x',t)cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d_{ij}{}^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d_{ij}{}^2}} \\ &+ j\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' \frac{I_j(x',t)sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d_{ij}{}^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d_{ij}{}^2}}\end{aligned} \tag{26}$$

が得られる。ただし、d_{ij} は幾何平均距離[5]である。

ここで、(5)の連続の方程式より

$$\frac{\partial Q_i(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial I_i(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{27}$$

が成立する。また、導体外部の、しかしながら、導体表面での電場である(17)の $E_{i//}$ は、(9)より

$$E_{i//}(x,t) = -\frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_i(x,t)}{\partial t} \tag{28}$$

と与えられる。その一方、導体内部の、しかしながら、導体表面での電場である(17)の E_{ix} は、(7)のオームの法則を満たし、

$$E_{ix}(x,t) = R_i I_i(x,t) \tag{29}$$

と与えられる。(28)と(29)を(7)に代入して

$$-\frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_i(x,t)}{\partial t} = R_i I_i(x,t) \tag{30}$$

が成立する。

以上で得た、(25)、(26)、(27)、及び、(30)を連立して解けば良い。

3.3 線状アンテナと積分方程式、及び、２つの異なる電磁気現象の共存

話を簡単にするために、導体が 1 本の線状アンテナを考えよう。このとき、添え字は不要である。ここで、

$$\phi(x,t) = \phi(x)e^{-j\omega t} \tag{31}$$

$$A(x,t) = A(x)e^{-j\omega t} \tag{32}$$

$$Q(x,t) = Q(x)e^{-j\omega t} \tag{33}$$

$$I(x,t) = I(x)e^{-j\omega t} \tag{34}$$

とする。(27)の連続の方程式より、

$$-j\omega Q(x) = \frac{\partial I(x)}{\partial x} \tag{35}$$

が得られる。(25)と(26)より電磁ポテンシャルを求め、(30)のオームの法則に代入して、

$$
\begin{aligned}
RI(x) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' Q(x')\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}}\right] \\
&+ j\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' Q(x')\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}}\right] \\
&- j\omega\left[\begin{array}{l}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l dx' I(x')\frac{cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}} \\ + j\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l dx' I(x')\frac{sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}}\end{array}\right]
\end{aligned} \tag{36}
$$

が得られる。この式の $Q(x)$ に(35)を代入して、部分積分を実行すると、

$$
\begin{aligned}
RI(x) &= \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}I(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}}\right] \\ - j\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}I(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}}\right]\end{array}\right]_0^l \\
&+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' I(x')\frac{\partial^2}{\partial x'\partial x}\left[\frac{cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}}\right] \\
&+ j\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' I(x')\frac{\partial^2}{\partial x'\partial x}\left[\frac{sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}}\right] \\
&- j\omega\left[\begin{array}{l}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l dx' I(x')\frac{cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}} \\ + j\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l dx' I(x')\frac{sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}}\end{array}\right]
\end{aligned} \tag{37}
$$

が得られる。被積分関数は全て電流 $I(x)$ を含むので、この式は Fredholm 形第 2 種の積分方程式である。

この積分方程式の一般的な解法は知られていないものの、電流の振る舞いは想像出来る。電流 $I(x)$ は複素数であるから、右辺の $-j\omega$ を係数とする最後の項（ベクトルポテンシャルに起因する項）は電流の実数部と虚数部とを入れ替えることにより、前半の項を相殺する効果を持つ。

ところで、この式は元々(17)の電場の境界条件から得られたことからして、相殺する現象は、２つの異なる電磁気現象のそれぞれに電場が存在していて、その重ね合わせの現象が発生していると考えるのが良い。その結果、左辺の抵抗がゼロ（ $R=0$ ）で完全導体であっても、ノンゼロの電流が存在出来ると考えることが出来る。

この式からは以上のことが判明するが、解を得ることは困難である。そこで、回路理論と言うモデル化を行なって、解を得ることにする。

3.4　電位係数と誘導係数

電気信号の伝搬を表す(25)と(26)の実数部である右辺の第 1 項を近似して、それぞれ、電位係数 P_{ij} と誘導係数 L_{ij} を用いて表わす。

$$
\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' \frac{Q_j(x')cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+{d_{ij}}^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+{d_{ij}}^2}} \approx P_{ij}Q_j(x) \tag{38}
$$

$$
\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l dx' \frac{I_j(x')cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+{d_{ij}}^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+{d_{ij}}^2}} \approx L_{ij}I_j(x) \tag{39}
$$

電位係数と誘導係数はいずれもノイマンの公式で計算される[5]。両係数の比の平方根は光速となり、積の平方根は特性インピーダンスとなる。

$$
\sqrt{\frac{P_{ij}}{L_{ij}}} = c \tag{40}
$$

$$
Z_{ij} = \sqrt{P_{ij}L_{ij}} \tag{41}
$$

3.5　多重極子能率

通常遠方での電磁波を計算するため、(23)や(24)の被積分関数の一部を

$$
\frac{e^{j\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = j\frac{\omega}{c}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)j_l\left(\frac{\omega}{c}r'\right)h_l\left(\frac{\omega}{c}r\right)P_l(cos\,\theta') \tag{42}
$$

と、球ハンケル関数と球ベッセル関数で展開する[8]。これを利用して、多重極子能率が定義され、各能率に応じた電磁波の輻射理論が構築されている。

これに対して、本論文での電磁波の輻射・吸収を伴う回路理論では、(25)や(26)の虚数部が電磁波の輻射・吸収を表しており、この項を多重極子能率で表現する必要がある。そこで、簡単のため、幾何平均距離をゼロとしてやると、

$$
\frac{sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+{d_{ij}}^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+{d_{ij}}^2}} \approx \frac{sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2}} \tag{43}
$$

が得られる。この式は、線状アンテナを細い線とする近似である。

ところが、この式の右辺は、数学公式により

$$
\frac{sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2}} = \frac{\omega}{c}\frac{\pi^2}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)j_m\left(\frac{\omega}{c}x\right)j_m\left(\frac{\omega}{c}x'\right) \tag{44}
$$

と、球ベッセル関数で展開することが出来る[9]。幾何平均距離をゼロとする必要があるが、新しい回路理論でも、電磁波の輻射・吸収に対して、多重極子能率を導入出来ることになる。

4.　線状アンテナの回路理論

4.1　電気双極子能率の導入と電磁ポテンシャル

複数の配線からなる多導体伝送線路の回路理論を展開するのは煩雑であるので、ここでは線状アンテナの回路理論を示すことにする。

先ず(44)に基づいて、(23)と(24)の虚数部から電気双極子能率の項を取り出すことにする。ただし、実数部に付いては、(38)の電位係数と(39)の誘導係数を用いて表わしておく。

$$\phi(x,t) = PQ(x,t) + j\alpha_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega}{c}\frac{\pi^2}{2}\frac{3}{2} j_1\left(\frac{\omega}{c}x\right)\int_0^l dx' \frac{\omega}{c}x' Q(x',t) \tag{45}$$

$$A(x,t) = LI(x,t) + j\beta_0 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega}{c}\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{2} j_0\left(\frac{\omega}{c}x\right)\int_0^l dx' I(x',t) \tag{46}$$

ただし、係数α_1, β_0は本来 1 にすべきであろうが、各項の出自を明らかにしておきたいので、これらの係数を付けておいた。

ここで、電流の積分量と電気双極子能率を定義しておく。

$$I^{int}(t) = \int_0^l dx' I(x',t) \tag{47}$$

$$D^{int}(t) = \int_0^l dx' Q(x',t) x' \tag{48}$$

これらの量は独立ではなく、(27)の連続の方程式より、以下の関係を満たす。

$$\frac{\partial D^{int}(t)}{\partial t} = I^{int}(t) \tag{49}$$

以上より、線状アンテナの電磁ポテンシャルが書ける。それに際して、(41)の特性インピーダンスを採用しておく。

$$\phi(x,t) = cZQ(x,t) + j\alpha_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi^2}{2}\frac{3}{2}\frac{\omega}{c} j_0\left(\frac{\omega}{c}x\right) D^{int}(t) \tag{50}$$

$$A(x,t) = \frac{Z}{c} I(x,t) + j\beta_0 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega}{c}\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{2} j_0\left(\frac{\omega}{c}x\right) I^{int}(t) \tag{51}$$

4.2　解くべき連立偏微分方程式

(51)のベクトルポテンシャルを時間で微分し、(30)のオームの法則に代入して、スカラーポテンシャルの空間微分を得る。

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} = -\frac{Z}{c}\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + j\beta_0 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega}{c}\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{2} j_0\left(\frac{\omega}{c}x\right)\frac{\partial I^{int}(t)}{\partial t} - RI(x,t) \tag{52}$$

(50)より、スカラーポテンシャルの時間微分を計算する。

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -cZ\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} + j\alpha_1\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{3\pi}{16\varepsilon_0} I^{int}(t) j_1\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{53}$$

4.3　空間に関する連立偏微分方程式

(52)と(53)の連立偏微分方程式の解を求めれば良い。簡単のため、時間変化を単振動とする。

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} = j\omega\frac{Z}{c} I(x) + \beta_0\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega}{c}\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{2} j_0\left(\frac{\omega}{c}x\right) I^{int} - RI(x) \tag{54}$$

$$-j\omega\phi(x) = -cZ\frac{\partial I(x)}{\partial x} + j\alpha_1\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{3\pi}{16\varepsilon_0} I^{int} j_1\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{55}$$

4.4　解を求める計算の現状

電流$I(x)$を求めるためには、三角関数の積分の他、$\dfrac{sin\xi}{\xi}$や$\dfrac{1-cos\xi}{\xi}$の積分を実行する必要があり、従って、積分三角関数$ci(\xi)$や$Si(\xi)$が登場する。

このとき、三角関数においては加法定理が知られているが、積分三角関数については加法定理の公式が知られていないため、計算が簡単化出来ない事態が発生している。現在、鋭意検討中である。

4.5　回路エネルギーと損失エネルギー

回路エネルギーは

$$P_{circuit}(x) = \frac{1}{4}\{\phi(x) I^*(x) + \phi^*(x) I(x)\} \tag{56}$$

で与えられる。これを微分すると、単位長さ当たりの回路エネルギーの変化率が計算出来る。

$$\frac{\partial P_{circuit}(x)}{\partial x} = \frac{1}{4}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} I^*(x) + \phi(x)\frac{\partial I^*(x)}{\partial x}\\ &+\frac{\partial\phi^*(x)}{\partial x} I(x) + \phi^*(x)\frac{\partial I(x)}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

これに(54)と(55)のスカラーポテンシャルと電流の空間微分を代入して積分すると、回路の損失エネルギーが求まる。

$$\begin{aligned}P^{loss} &= \frac{1}{4}\int_0^l dx \frac{dP_{circuit}(x)}{dx}\\ &= -\frac{1}{2} R\int_0^l dx I(x) I^*(x) - \frac{1}{4}\beta_0 \frac{\omega^2}{c}\frac{\mu_0\pi}{16}\left(I^{int} I_0^{int}* + I^{int}* I_0^{int}\right)\\ &+ \frac{1}{4}\alpha_1 \frac{\omega}{c^2}\frac{3\pi}{16\varepsilon_0}\frac{\omega}{jcZ}\left(\phi_1^{int} I^{int}* - \phi_1^{int}* I^{int}\right)\end{aligned} \tag{58}$$

この式はそれなりに美しく見えるが、物理が明らかではなさそうである。なお、この式に現われる積分量あるいは今後現われる積分量は次のように定義される。

$$I_0^{int} = \int dx j_0\left(\frac{\omega}{c}x\right) I(x) \tag{59}$$

$$I_1^{int} = \int dx j_1\left(\frac{\omega}{c}x\right) I(x) \tag{60}$$

$$I_2^{int} = \int dx j_2\left(\frac{\omega}{c}x\right) I(x) \tag{61}$$

$$\phi_0^{int} = \int dx j_0\left(\frac{\omega}{c}x\right) \phi(x) \tag{62}$$

$$\phi_1^{int} = \int dx j_1\left(\frac{\omega}{c}x\right) \phi(x) \tag{63}$$

ここで、この式のうち、(62)と(63)に、(55)を代入して、電流の微分に対して部分積分を実行すると、損失エネルギーは次のようにまとめられる。

$$
\begin{aligned}
P^{loss} &= \int_0^l dx \frac{dP_{circuit}(x)}{dx} \\
&= -\frac{1}{2} R \int dx I(x) I^*(x) \\
&+ \frac{1}{4}(\alpha_1 - \beta_0) \frac{\omega^2 \pi}{16\varepsilon_0 c^2} \left(I^{int} I_0^{int}* + I^{int}* I_0^{int} \right) \\
&- \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{\omega^2 \pi}{16\varepsilon_0 c^3} \left(I^{int} I_2^{int}* + I^{int}* I_2^{int} \right)
\end{aligned}
\tag{64}
$$

ここで、先に述べたように、$\alpha_1 = \beta_0 = 1$ とすると、右辺の第２項が相殺され、損失エネルギーは

$$
\begin{aligned}
P^{loss} &= \int_0^l dx \frac{dP_{circuit}(x)}{dx} \\
&= -\frac{1}{2} R \int_0^l dx I(x) I^*(x) - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \pi}{16\varepsilon_0 c^3} \left(I^{int} I_2^{int}* + I^{int}* I_2^{int} \right)
\end{aligned}
\tag{65}
$$

となる。右辺の第 2 項は、電磁波の輻射の場合には負の値になり、吸収の場合には正の値になる。

ところで、(64)の右辺の第 2 項が相殺されることを奇異に思われるかも知れない。しかしながら、遠方での電場を(42)により計算すると、動径方向の電場は、スカラーポテンシャルによるものとベクトルポテンシャルによるものとが相殺し、球面波になることが知られており、それに似た事情にあるようである。

ただし、(65)のように、美しい式にはなったが、I^{int} や I_2^{int} が計算出来ている訳ではないことをお断りしておく。第 4.4 節で述べたように、そもそも $I(x)$ が求まっていないので、要注意である。それを求めることは今後の課題である。

5. まとめ

電気信号の伝搬現象を記述するには、従来は静電係数が用いられていたが、電位係数を用いるのが適切であることを明らかにした[5,6]。静電係数は静電容量係数や静電誘導係数のことであり、コンデンサーのことである。それが不適切な物理量と言うことになるので、そこを流れる変位電流は存在しないと言える[2]。通常、変位電流を含めてキルヒホフの第 1 法則（電流則）が成立すると考えて来たから、その法則も成立しないことになる。抵抗性導体を流れる電流とは伝導電子の移動であり、その伝導電子にはローレンツ力と摩擦力が作用するとした結果、オームの法則が成立するので、電磁誘導と呼ばれる現象も存在しないことになる。

本論文では、これらに加えて、導体に電流が流れるとき、電気信号の伝搬に関連する電磁場と、電磁波の輻射・吸収に関連する電磁場と言う、２つの異なる電磁気現象の電磁場の重ね合わせとなっていることを明らかにした。電磁波の輻射・吸収現象は遅延ポテンシャルで取り扱われるが、それを単一周波数交流複素数表示すると、その実数部は電気信号の伝搬現象を表し、その虚数部が電磁波の輻射・吸収現象を表すこと、従って、異なる電磁気現象の電磁場が共存していることが明快に示された。さらに、電磁波の輻射・吸収を多重極子能率で表現出来ることを示した。

本論文の遅延ポテンシャルに基づく新しい回路理論では、起電力法(EMF)は正しく、アンテナパラドックスも発生しないことが示される。

しかし、その一方で、導体表面での境界条件や、導体内部での表皮効果の見直しを必要としているようである。例えば、抵抗性導体では表皮効果が発生し、表皮厚さが有限である。これに対して、抵抗がゼロの完全導体では、２種類の異なる電磁気現象の電場が相殺するため、表皮厚さが無限になることが予想される。それについては、証明を要するが、無理のない自然な流れで説明出来ることになる。

参考文献

[1] K. Sato and H. Toki, “CHALLENGE TO ANTENNA-MODE THEORY OF MULTICONDUCTOR TRANMISSION-LINE”, Proceedings of the 6th Particle Accelerator Society Meeting (2009) 422-428

[2] H. Toki and K. Sato, Electrodynamics of multiconductor transmission-line theory with antenna mode, Electromagnetic Waves Propagation in Complex Matter, InTech, (2011) 233-254, http://www.intechopen.com/articles/show/title/electrodynamic-of-multiconductor-transmission-line-theroy-with-antenna-mode

[3] 安達三郎、「電磁波工学におけるパラドックス - その思い違いを探る - 」、電子通信学会誌、Vol.67、No.6 (1984) 657-662

[4] 稲垣直樹、「アンテナパラドックス：起電力法で計算されたインピーダンスは正しいか」、富士通テン技報、Vol.4、No.2 (1986) 1

[5] H. Toki and K. Sato, Journal of Physical Society of Japan, Vol. 78, No.9 (2009) 094201-1 - 094201-8

[6] K. Sato and H. Toki, “NOISE GENERATION MECHANISM: COUPLING OF NORMAL AND COMMON MODES IN 3 CONDUCTOR TRANSMISSION LINE THEORY”, Proceedings of the 5th Particle Accelerator Society Meeting (2008) 154-158

[7] K. Sato and H. Toki, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 565 (2006) 351-357

[8] 砂川重信、「理論電磁気学」、紀伊國屋書店

[9] 数学ハンドブック編集委員会編、「理工学のための数学ハンドブック」、丸善