INDIVIDUAL BPM RESOLUTION MEASUREMENTS UNDER LINEAR LATTICE ACCELERATOR MODEL

Naoki Hayashi*[A)],
[A)]Accelerator Division, J-PARC Center (JAEA)
2-4 Shirakata-Shirane, Tokai, Naka-gun, IBARAKI, 351-1195

Abstract

Under linear lattice assumption, average position resolution of BPM (Beam Position Monitor) could be estimated by using 3-BPM method. However, this determined resolution is average value of these BPM, it is no individual characteristics. It would not be a problem, if these three BPMs have the same characteristics. In this paper, the 3-BPM method is extended to determine the individual resolution and this new method is applied for the J-PARC RCS BPM systems.

線形ラティスの加速器モデルを使ったBPM個別の分解能測定

1． はじめに

線形ラティスのもとでは、三か所のビーム位置に関する関係は、二つの係数と二か所のビーム位置が、三か所目のビーム位置と関係している。さらに、3か所のBPMの測定分解能を同じと考えた時、それらを簡単に解くことができるが、個々の分解能が大きく違う時の手法は、明示されていなかった。本論文は、BPMの個別の測定分解能を仮定した場合にどうなるか考察する。また、その応用例として、J-PARC RCSのBPMシステムに適用し、個々の分解能を推定する。

2． 3-BPM法

BPMの位置の測定分解能の推定に、3-BPM法という方法がある [1]。線形ラティスを仮定し、dispersionのない所では、任意の3箇所のBPMでの位置 x_1, x_2, x_3 の関係は、係数 A, B を使って、

$$x_3 = Ax_1 + Bx_2 \tag{1}$$

とかける。各位置での傾き x_1', x_2', x_3' も使って書くと、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}$$

となるので、結局、係数は、

$$A = -\frac{n_{12}}{m_{12}} \tag{2}$$

$$B = \frac{m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12}}{m_{12}} \tag{3}$$

となる。但し、$m_{12} = m_{21}, m_{11}m_{22} - m_{12}^2 = 1$ を使っている。ただ、既に指摘されているように、BPMの測定値 x_i にoffset Δ_i が含まれている場合は、式(1)右辺にに別項 C が加わる [1]。

$$C = \frac{n_{12}}{m_{12}}\Delta_1 - \frac{m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12}}{m_{12}}\Delta_2 + \Delta_3 \tag{4}$$

* naoki.hayashi@j-parc.jp

残念ながらこの方法でoffsetを決めることはできないので、別の方法で決める必要がある。

ここで、多数回 (N 回) の測定[1]を行うと、A, B もそれから決定できる [2]。図1は、3つのBPMの相関を調べるため、複数の補正電磁石でkick量を変えながら取った測定値を3次元的にプロットしたものである。この例は、原点を含まないので、$C \neq 0$ ではあるが、式(1)を満たしている。ここで、

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_{3n} - (Ax_{1n} + Bx_{2n})\}^2 \tag{5}$$

は、平面決定後、x_3 軸で比べた、各測定点との残差の自乗平均であり、さらに、3台のBPMの分解能 $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3}$ が全て同じ σ_x だとすると、

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sigma^2}{1 + A^2 + B^2}} \tag{6}$$

となり、分解能が推定できる。

3． BPMの台数が増えた時

先に述べた、係数 A, B の具体的な表現を求める。教科書などを参考にすれば、式(2)の行列要素 m_{ij} は、各点 i での β_i 関数及び、位相 ϕ_i を使い、以下のように書くことができる。

$$m_{11} = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos\Delta\phi_{12} + \alpha_1 \sin\Delta\phi_{12}) \tag{7}$$

$$m_{12} = \sqrt{\beta_1\beta_2}\sin\Delta\phi_{12} \tag{8}$$

$$m_{21} = -\frac{1 + \alpha_1\alpha_2}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}\sin\Delta\phi_{12} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}\cos\Delta\phi_{12} \tag{9}$$

$$m_{22} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}(\cos\Delta\phi_{12} - \alpha_2 \sin\Delta\phi_{12}) \tag{10}$$

[1]その間、1,2,3の間でkickなど磁場状況が不変なこと。その領域外の変化は構わない。

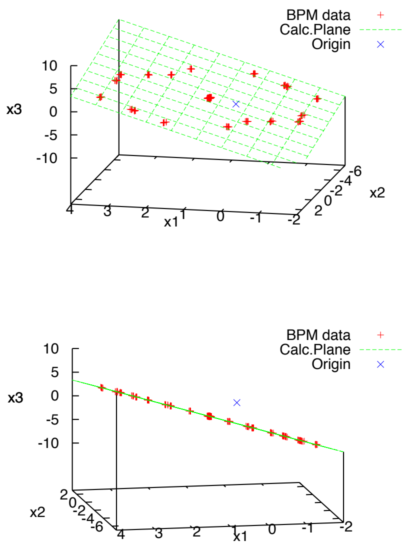

図 1: 3 つの BPM の測定値。上下は測定点が同一平面上にあることが分かるよう参照角度を変更した。[3]

ここで、$\Delta\phi_{12} \equiv \phi_2 - \phi_1$ である。
　これから係数 A, B は、

$$A = -\sqrt{\frac{\beta_3}{\beta_1}}\frac{\sin\Delta\phi_{23}}{\sin\Delta\phi_{12}} = -\frac{b_3}{b_1}\frac{s_{23}}{s_{12}} \tag{11}$$

$$B = \sqrt{\frac{\beta_3}{\beta_2}}\frac{\sin\Delta\phi_{13}}{\sin\Delta\phi_{12}} = \frac{b_3}{b_2}\frac{s_{13}}{s_{12}} \tag{12}$$

となる。$\sqrt{\beta_i} = b_i, \sin\Delta\phi_{ij} \equiv s_{ij}$ は、後で式を簡略化するため導入した。先に進む前に、位相について次の関係が成立することを示す。

$$\begin{aligned} & \sin\Delta\phi_{12}\sin\Delta\phi_{34} - \sin\Delta\phi_{13}\sin\Delta\phi_{24} \\ = & -\frac{1}{2}\left[\cos(\Delta\phi_{12}+\Delta\phi_{34}) - \cos(\Delta\phi_{12}-\Delta\phi_{34})\right] \\ & +\frac{1}{2}\left[\cos(\Delta\phi_{13}+\Delta\phi_{24}) - \cos(\Delta\phi_{13}-\Delta\phi_{24})\right] \\ = & \frac{1}{2}\left[\cos(\Delta\phi_{14}-\Delta\phi_{23}) - \cos(\Delta\phi_{14}+\Delta\phi_{23})\right] \\ = & -\sin\Delta\phi_{14}\sin\Delta\phi_{23} \end{aligned} \tag{13}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{12} - \Delta\phi_{34} &= \Delta\phi_{13} - \Delta\phi_{24} \\ \Delta\phi_{12} + \Delta\phi_{34} &= \Delta\phi_{14} - \Delta\phi_{23} \\ \Delta\phi_{13} + \Delta\phi_{24} &= \Delta\phi_{14} + \Delta\phi_{23} \end{aligned}$$

を使った。
　では、未知数 (BPM の数) を $x_4, x_5, x_6, \ldots$ と増やし、条件式も増やしたらどうだろうか。まず、4 台の場合、そこでのビーム位置 x_1, x_2, x_3, x_4 (但し、beam 軸方向 s について単調増加) の関係は、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} -b_2b_3s_{23} & b_1b_3s_{13} & -b_1b_2s_{12} & 0 \\ -b_2b_4s_{24} & b_1b_4s_{14} & 0 & -b_1b_2s_{12} \\ -b_3b_4s_{34} & 0 & b_1b_4s_{14} & -b_1b_3s_{13} \\ 0 & -b_3b_4s_{34} & b_2b_4s_{24} & -b_2b_3s_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{14}$$

一見、未知数が増えた分、条件も増えた様に思えるが、左辺の 4×4 行列は、(2 行目) + (1 行目) $\times\, (-\frac{b_4s_{24}}{b_3s_{23}})$ と条件式 (13) で、(4 行目) $\times\, (\frac{b_1s_{12}}{b_3s_{23}})$ と同じになる。同様に、(3 行目) + (1 行目) $\times\, (-\frac{b_4s_{34}}{b_2s_{23}})$ と条件式 (13) で、(4 行目) $\times\, (\frac{b_1s_{13}}{b_2s_{23}})$ と同じになる。結局、この行列は、rank 2 であることが分かる。さらにビーム位置を $x_5, x_6, \ldots$ と増やしても同じで、行列は、rank 2 のままである。当然ながら $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ について独立な情報を得ることができない。任意の場所で、初期条件 x, x' を与え無ければ、決まらない。
　測定分解能については、式 (5, 6) で求めた様に次のような関係になると考えられる。

$$\sigma_1^2 = A_1^2\sigma_{x_1}^2 + B_1^2\sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 \tag{15}$$

ここで、σ_{x_i} は、x_i の測定の分解能である。これを 4 台の BPM の場合で考えると

$$\begin{pmatrix} A_1^2 & B_1^2 & 1 & 0 \\ A_2^2 & B_2^2 & 0 & 1 \\ A_3^2 & 0 & B_3^2 & 1 \\ 0 & A_4^2 & B_4^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 \\ \sigma_{x_2}^2 \\ \sigma_{x_3}^2 \\ \sigma_{x_4}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \\ \sigma_4^2 \end{pmatrix}$$

のように書ける。ただ、左辺の 4×4 行列は、実際計算してみると、rank 3 で逆行列は存在せず、誤差を決定することはできない。しかし、BPM の台数が 5 以上であれば、rank 5 になるので、この方程式[2]から分解能を決めることができる。

4． J-PARC RCS の BPM への応用

　J-PARC RCS の BPM は、half-cell 毎、ほぼ各四極電磁石近傍に、全部で 54 台設置してある。信号処理回路で、20ms の間に 20 回測定し、1 回あたりの sampling 時間は、約 100μs である [4]。
　今回解析に用いたデータは、加速しない DC モードに於いて、補正電磁石で、与える kick を変えながら全周のビーム位置情報を記録した。解析の際は、kick を与えた場所を間に含まないよう、BPM の組合せを選ぶ。J-PARC RCS の光学パラメータは、よく測定され、またそれを再現する加速器モデルが作られている。解析の最初の手順として、まず係数 A, B を決定する必要があるが、それをモデルから計算されたものと実測から得られたものとを比較したのが、図．2 である。比率でみると最悪、15 ∼ 25% くらいずれている場所もあるが、選んだ BPM 間の位相差が $\pi/2$ の整数倍に近くなる所で、それ以外では、概ね一致することが確かめられた。この係数を決めることは、3 次元の平面を決定することだが、厳密にいえば、各測定点と平面と「距離を最小化

[2]5 台の場合で、未知数 5、条件式 10 の過剰決定系になる。台数が、6,7,8 台と増えると条件式も 20,35,56 と増える。

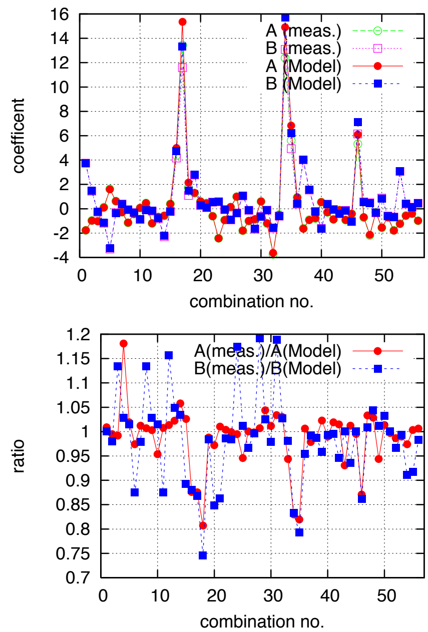

図 2: 測定及びモデルから得られる係数の比較。8 台の BPM サブグループからさらに 3 台を選ぶの組合せ毎に比較した。左が絶対値での比較、右は、モデルと測定の係数の比を示した。

する」のか「ある軸 (ここでは、x_3) 軸に対して最小化する」のかで、計算方法は異なる。両方の結果を比べ、A, B についてほとんど差異がなかったので、誤差の推定まで含め扱いやすい後者の方を用いた。なお、水平方向は、dispersion の影響が考えられるので、今回は、垂直方向の位置についてだけ調べた。

最初は、54 台中連続する 6 台のサブグループを作り、そこからさらに 3 台選んで、先の係数 A_i, B_i 及び残差の自乗平均 $(\sigma_i)^2$ を、20 通りの組み合わせ条件について決めた。6 台の分解能 $\sigma^2_{x_i}$ を、新たな未知数として、20 個の方程式から、SAD の `LinearSolve[]` Module により、SVD (singular value decomposition) の解を得た。サブグループが 6 台なので、1 台の BPM につき、6 回の推定ができる。ただ、誤差が少なく非常に、よく決まる場所とそうでない場所、があったため、サブグループの BPM の数を、8 台に増やし再度計算した。その結果を、図. 3 に示す。同時に、従来の方法、連続する 3 台の分解能をまず同じと仮定して、計算した結果も合わせてプロットした。

これにより、分解能が大きい場所が明確になった。従来の方法だと、隣の影響で、実際の分解能が大きくても小さく見積もってしまう可能性がある。特に目立つのは、2 番目の BPM である。単純に全く同じ条件の比較した時でも、20ms の間のバラつきが大きかったので、従来の方法だと、過小評価することが確認できた。また、RF セクションの一部には、DC モードの運転では、cavity からノイズが乗る時があるので、RF セクションの一部では、その影響で分解能が大きくなっている可能性がある。σ^2 が最小になる場所からは、BPM 単体の性能が推定でき、それは $\sigma = 14 \sim 20\mu m$ であった。

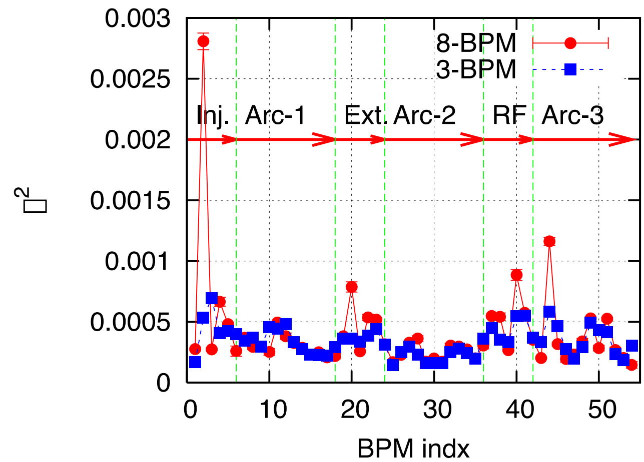

図 3: 連続する 3 つの BPM の垂直方向の分解能 (σ) を同じと仮定した場合 (3-BPM ■)、とその仮定を置かない場合 (8-BPM ●)、の分解能を全周の BPM 54 台についてプロットした。RCS は、3 つの直線部、入射部 (Inj.)、出射部 (Ext.)、RF 部の 3 つの直線部とそれをつなぐ Arc 部からなり、その領域も図示した。

5． まとめ

3-BPM 法を発展させ、5 台以上の BPM の系では、個別の分解能を求めることができる事をしめした。そして、この結果を、J-PARC RCS BPM システムについて適用した。実際には、誤差を減らすため、5 台よりさらに増やし、8 台の中から選ぶようにした。その結果、最も良い場所で、$\sigma^2 = 0.0002 \sim 0.0004$ 以下、$\sigma = 14 \sim 20\mu m$ 以下と推定できた。今回は、垂直のビーム位置だけについてだが、水平のビーム位置についても適用を試みる。

参考文献

[1] 諏訪田 剛, “ビーム計測 I” OHO 2002 (2002).

[2] 平松成範、「加速器のビームモニター」, KEK Internal 2004-4 文部科学省高エネルギー加速器研究機構平成 15 年度技術部職員専門研修

[3] 林　直樹, “ビームモニター１：ビーム位置モニター” OHO 2010 (2010).

[4] N. Hayashi, et al., “The Beam Position Monitor System for the J-PARC RCS” *Proceedings of EPAC 2008*, p.1128-1130., Genova, Italy (2008)