

# DESIGN OF THE SIX-ELECTRODE CIRCULAR CROSS-SECTIONAL BPM FOR SECOND-ORDER MOMENT MEASUREMENT

Kenichi Yanagida\*, Shinsuke Suzuki and Hirofumi Hanaki,  
 JASRI, Accelerator Division /SPRING-8  
 1-1-1 Kouto, Sayo-cho, Sayo-gun, Hyogo 679-5198

## Abstract

A six-electrode circular cross-sectional beam position monitor (BPM) was designed for a second-order moment measurement. A type of electrode is stripline which is similar to that of the existing BPM in the SPRING-8 linear accelerator. Because of saving a number of detection circuits a number of electrodes was decided as six which is the smallest number for a second-order moment measurement. Because a stripline electrode composes a transverse electromagnetic mode transmission line its characteristic impedance can be solved by means of calculating an electrostatic capacitance per unit length. An electrostatic capacitance per unit length can be obtained using an approximation of parallel plate capacitor. For more accuracy the numerical calculation using a finite difference method was developed. The accuracy of numerical calculation is estimated about 1 %.

## 二次モーメント測定用六電極円形断面BPMの設計

### 1. はじめに

現在、多くの加速器施設でビーム位置モニタ (BPM) が使用されており、ビーム重心位置の測定に使用されている。近年はビーム重心位置のみならず、ビーム広がり (二次または三次モーメント) を測定するために、八つの電極やピックアップを有する円形断面のBPMが開発され、使用されている [1][2]。

SPRING-8 線型加速器では非分散部及び分散部に於いて、ビーム広がり (二次モーメント) の観測を可能とする六電極BPMを設置する予定である。非分散部に於いてビーム広がりを観測する目的は、Twissパラメータを測定するためであり [3]、分散部に於いてはエネルギー広がり ( $\Delta E/E$ ) を測定するためである。

横方向二次元平面内の電荷分布に於いて、独立な  $n$  次モーメントは二つ存在し、それらを  $\Delta P_n$  及び  $\Delta Q_n$  とする ( $\Delta$  は単位長さ当たりの電荷量)。  $\Delta P_n$  及び  $\Delta Q_n$  は  $n$  次モーメントのサイズ  $a_n$  と仰角  $\alpha_n$  を用いて、

$$\begin{aligned} \Delta P_n &= \Delta a_n^n \cos n\alpha_n \\ \Delta Q_n &= \Delta a_n^n \sin n\alpha_n \end{aligned} \quad (1)$$

$(0 \leq a_n, 0 \leq n\alpha_n < 2\pi)$

と表わされる。座標の原点は円形断面真空ダクトの中心である。

実際にビームを測定して得られる物理量は各次モーメントを単位長さ当たりの電荷量で除した量  $P_n$  及び  $Q_n$  であり、一次及び二次のそれらは以下の通りである。

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1 \cos \alpha_1 \\ Q_1 &= a_1 \sin \alpha_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= a_2^2 \cos 2\alpha_2 \\ Q_2 &= a_2^2 \sin 2\alpha_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$P_2$  及び  $Q_2$  は真空ダクト中心を原点としたものであるが、我々が本質的に知りたいのはビーム広がりに関する量、すなわち、ビーム重心を原点とした二次モーメントを電荷量で除した量  $P_{g2}$  及び  $Q_{g2}$  である。  $P_{g2}$  及び  $Q_{g2}$  は以下の関係式から得られる。

$$\begin{aligned} P_{g2} &= a_1^2 \cos 2\alpha_1 + P_{g2} \\ Q_{g2} &= a_1^2 \sin 2\alpha_1 + Q_{g2} \end{aligned} \quad (4)$$

$P_{g2}$  及び  $Q_{g2}$  には式 (3) のような関係を満たすサイズ  $a_{g2}$  と仰角  $\alpha_{g2}$  が存在する。

$$\begin{aligned} P_{g2} &= a_{g2}^2 \cos 2\alpha_{g2} \\ Q_{g2} &= a_{g2}^2 \sin 2\alpha_{g2} \end{aligned} \quad (5)$$

$a_{g2}$  及び  $\alpha_{g2}$  はビーム電荷分布が楕円形状の場合に、図 1 に示されるようなサイズと仰角を表すパラメータとなる。二次モーメントサイズの二乗  $a_{g2}^2$  は、楕円形状に於ける長径方向のサイズを  $\sigma_u$ 、短径方向のサイズを  $\sigma_v$  とした場合に以下の関係となる (図 1 参照)。

$$a_{g2}^2 \sim \sigma_u^2 - \sigma_v^2 \quad (6)$$

通常の加速器に於いては、スクュー四極磁場が存在しない場合が多い。この場合は  $\alpha_{g2} = 0, \pi/2$  となるので、  $P_{g2}$  及び  $Q_{g2}$  は、

$$\begin{aligned} P_{g2} &= a_{g2}^2, -a_{g2}^2 \\ Q_{g2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

と単純な形となる。  $\alpha_{g2} = 0$  の場合は楕円の長径方向が  $x$  方向、短径方向が  $y$  方向となり、  $\alpha_{g2} = \pi/2$  の場合は長径方向が  $y$  方向、短径方向が  $x$  方向となる。いずれの場合でも式 (7) は、

$$\begin{aligned} P_{g2} &\sim \sigma_x^2 - \sigma_y^2 \\ Q_{g2} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

\* ken@spring8.or.jp

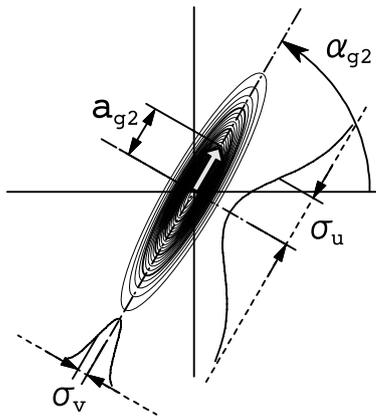


図 1: ビーム電荷分布が楕円形状の場合の  $a_{g2}$ 、 $\alpha_{g2}$  と  $\sigma_u$ 、 $\sigma_v$  の関係図 (電荷密度を等高線で表している)

で表される。

ビーム電荷分布によって半径  $R$  の円形断面金属ダクト内面に発生する電場の大きさ  $E(R, \theta)$  は

$$E(R, \theta) = \frac{\Lambda}{2\pi R \epsilon_0} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{O_n(\theta)}{R^n} \right\} \quad (9)$$

$$O_n(\theta) = P_n \cos n\theta + Q_n \sin n\theta$$

$$= a_n^n \cos n(\theta - \alpha_n)$$

と表される。ここで、 $O_n(\theta)$  は変調関数であり、 $P_n$  及び  $Q_n$  はダクト内面電場分布の  $\cos n\theta$  及び  $\sin n\theta$  成分の係数となって現れている。これは電場の角度分布を測定することで、係数  $P_n$  及び  $Q_n$  が得られる事を意味する。

BPM は一般的には、金属ダクト内にストリップライン電極やボタン電極を配している。複数の電極が存在する場合が一般的である。ここでは  $i$  番目の電極に於ける出力電圧  $V_i$  は電極面での電場積分値に比例すると仮定する。

$$V_i \propto \int_{R,i} E(R, \theta) d\theta \quad (10)$$

SPring-8 線型加速器では上に示す式 (9) 及び (10) を使用して、図 2 及び図 3 に示すような  $P_2$  及び  $Q_2$  が測定可能な円形断面 BPM の設計・製作を行った。本件はその設計に関しての発表である。

## 2. 電極占有角と出力差分

### 2.1 電極占有角

二次モーメントまで測定する場合、独立変数は式 (9) より、 $\Lambda$ 、 $P_1$ 、 $Q_1$ 、 $P_2$  及び  $Q_2$  の 5 つであり、最低必要な電極数は 5 である。しかし、今後の扁平ダクト等への拡張を考慮した場合、主に上下の対称性が必要となるので電極数は 6 とした。

SPring-8 線型加速器に於いて、現在使用されている四電極円形断面 BPM の電極占有角は  $5\pi/18$  ( $50^\circ$ ) である。六電極の場合、製作上の幾何条件及び出力電圧差分の条件から電極占有角を  $\pi/6$  ( $30^\circ$ ) とした (図 4 参照)。

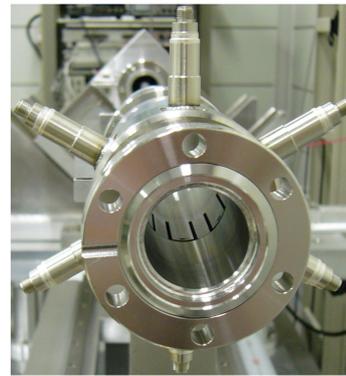


図 2: 設計・製作された六電極円形断面 BPM (写真)

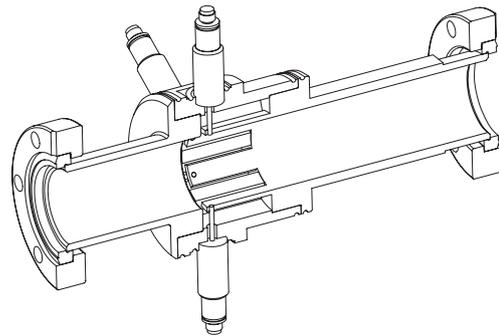


図 3: 設計・製作された六電極円形断面 BPM (図面)

電極形状は四電極円形断面 BPM と同じくストリップライン形状で、特性インピーダンスが約  $50 \Omega$  となるようにした。ストリップライン伝送路の端にはフィードスルーが取り付けられ、 $50 \Omega$  同軸ケーブルを介して信号処理回路へ電極出力電圧が送られる。ストリップライン伝送路の他端は  $0 \Omega$  で終端した形状となっている (図 2 及び図 3 参照)。

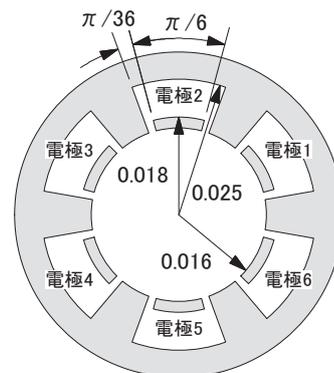


図 4: 六電極円形断面 BPM の断面図

### 2.2 電極出力電圧差分定義

各電極からの出力電圧の差分  $C_n$  及び  $S_n$  を定義する。二次モーメントまで測定するので、 $n = 1, 2$  となる。 $C_n$  及び  $S_n$  の選び方は一意ではないが、測定精度が最も良

くなるよう、以下のように差分を定義した。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{V_1 - V_3 - V_4 + V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6} \\ S_1 &= \frac{V_2 - V_5}{V_2 + V_5} \\ C_2 &= \frac{V_1 + V_3 + V_4 + V_6 - 2(V_2 + V_5)}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6 + 2(V_2 + V_5)} \\ S_2 &= \frac{V_1 - V_3 + V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6} \end{aligned} \quad (11)$$

式(9), (10)及び(11)から、以下のような $C_1$ ,  $S_1$ ,  $C_2$ ,  $S_2$ と $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_2$ の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} P_1 &\approx 9.346 \times 10^{-3} C_1 \\ Q_1 &= 8.093 \times 10^{-3} S_1 \\ P_2 &\approx 13.37^2 \times 10^{-6} C_2 \\ Q_2 &\approx 12.44^2 \times 10^{-6} S_2 \end{aligned} \quad (12)$$

両辺の単位系は $n = 1$ の場合が $[m]$ 、 $n = 2$ の場合が $[m^2]$ である。

SPring-8線型加速器に於いて現存の信号処理回路を使用した場合、電極出力電圧差分の測定精度は $1 \times 10^{-3}$ 程度と見積られる<sup>[4]</sup>。この測定精度を式(12)の $C_n$ 及び $S_n$ に代入すると、測定可能な $P_n$ 及び $Q_n$ の大きさが求まる。それらは $P_1 \approx 9.346 \times 10^{-6}$ 、 $Q_1 = 8.093 \times 10^{-6}$ 、 $P_2 \approx 13.37^2 \times 10^{-9}$ 及び $Q_2 \approx 12.44^2 \times 10^{-9}$ である。 $P_2$ 及び $Q_2$ は二次なので、その大きさ(広がり)を把握するために平方根を取る。すなわち、 $\sqrt{P_2} \approx 422.8 \times 10^{-6}$ 、 $\sqrt{Q_2} \approx 393.3 \times 10^{-6}$ である。以上から、現存の信号処理回路を使用した場合、ビーム重心位置の情報として $10 \mu m$ 程度、ビーム広がり情報として $400 \mu m$ 程度が測定限界であると判断できる。

現在SPring-8線型加速器では電極出力電圧差分の測定精度が $1 \times 10^{-4}$ 程度となるような低ノイズ信号処理回路を開発している。もし、この低ノイズ信号処理回路が使用可能であるならば $P_1 \approx 0.9346 \times 10^{-6}$ 、 $Q_1 = 0.8093 \times 10^{-6}$ 、 $\sqrt{P_2} \approx 133.7 \times 10^{-6}$ 及び $\sqrt{Q_2} \approx 124.4 \times 10^{-6}$ となり、ビーム重心位置の情報として $1 \mu m$ 程度、ビーム広がり情報として $130 \mu m$ 程度が測定限界となり、測定精度が改善される。

### 3. 特性インピーダンス

TEM伝送路の特性インピーダンスを計算する方法は、市販の電磁界解析ソフトウェアに電極形状等境界条件を入力し、計算するのが一般的である。この場合、物理学的な知見や電極形状変化に伴う特性インピーダンスの変化傾向、支配的なパラメータなどを直感的に知ることは難しいと思われる。

そこで、無限に長いTEM伝送路の特性インピーダンスが単位長さ当たりの静電容量に反比例する性質を利用して、解析的手法により単位長さ当たりの静電容量を計算し、特性インピーダンスを概算する試みを行った。この概算を行うことで大まかな電極形状を決めることが可能となる。但し、特性インピーダンスを精度良く $50 \Omega$ に合致させるには、コンピュータによる数値計算が不可欠である。

概算ではTEM伝送路を平行平板コンデンサと見なし、静電容量の近似計算を行った。数値計算では敢えて市販の電磁界解析ソフトウェアを使用せず、有限差分法により電場を計算し、ガウスの定理を応用することにより静電容量を算出した。数値計算の精度を見積もるために、理論的に得られる同軸管の特性インピーダンス(理論値)を計算し、数値計算による結果と比較した。

#### 3.1 TEM伝送路のおさらい

抵抗を無視した場合、同軸管に代表されるTEM伝送路は、電磁波が伝播する方向には電場及び磁場の成分が存在せず、伝播する方向に垂直な平面内に電場及び磁場の成分が存在する。導体表面の電荷分布と電流分布が一致するため、電磁波の位相速度を $v$ 、単位長さ当たりの表面電荷を $Q$ 、表面電流を $I$ とした場合、以下の関係を満たすことがわかる。

$$I = vQ \quad (13)$$

本発表では、真空中に置かれるストリップライン(TEM)伝送路を考えるため、誘電率及び透磁率は周波数に依らず $\epsilon_0$ 及び $\mu_0$ となり、真空中の光速を $c$ した場合、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad (14)$$

となる。

特性インピーダンス $Z$ は導体間の電圧 $V$ と導体表面電流 $I$ の比、

$$Z = \frac{V}{I} \quad (15)$$

である。単位長さ当たりの電荷量 $Q$ と電圧 $V$ の関係は、単位長さ当たりの静電容量 $C$ を用いて、

$$Q = CV \quad (16)$$

であるため、式(15)の $Z$ は、

$$Z = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{C} \quad (17)$$

と表されることがわかる。

式(17)は解析的手法による概算であっても、コンピュータによる数値計算であっても、単位長さ当たりの静電容量が得られれば特性インピーダンスが得られることを意味する。本章では同軸管とストリップライン伝送路に就いて、特性インピーダンス(静電容量)の計算例を概算と数値計算の場合に分けて紹介する。

#### 3.2 特性インピーダンス(静電容量)の概算

同軸管及びストリップライン伝送路の特性インピーダンスを解析的手法により概算する例として、図5のような形状を想定する。左は同軸管であり $r = 0.007$ 、 $\rho = 0.016$ である。右はストリップライン伝送路で寸法は図4と同一である。

単位長さ当たりの静電容量は平行平板コンデンサ近似で計算する。平行平板コンデンサ近似では電極の面積と電極間距離 $d$ を仮定すれば良い。電極の面積は長手(longitudinal)方向の大きさが単位長(1m)なので、横(transverse)方向の大きさ $w$ を決めれば良い。図5

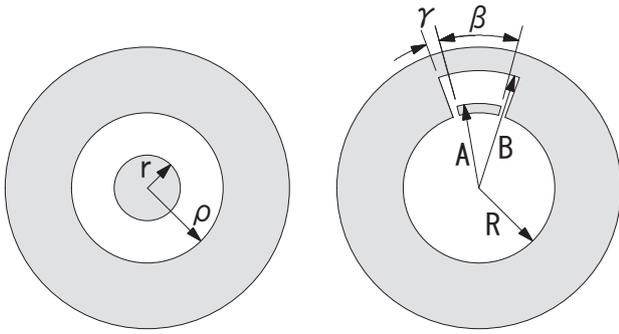


図 5: TEM 伝送路断面寸法図 左が同軸管、右がストリップライン伝送路

表 1: 平行平板コンデンサ近似をした場合の  $w$  及び  $d$

	$w$	$d$
同軸管	$\pi(r + \rho)$	$\rho - r$
S L 上面	$\beta(A + B)/2$	$B - A$
S L 片側面	$(A - R) + \gamma(A + R)/2$	$\gamma(A + R)/2$
S L 下面	$\beta R$	$2R$

で示された寸法値を使用し、 $w$  及び  $d$  を表 1 のように決定した。

同軸管の場合は特性インピーダンスは理論的に得られる。その値を  $Z_a$  とする。 $Z_a$  は  $r$  及び  $\rho$  で決定され、

$$Z_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \log_e \frac{\rho}{r} \quad (18)$$

である。

以上を基に概算した静電容量及び特性インピーダンスと  $Z_a$  の値を表 2 に示す。ストリップライン伝送路には左右二つの片側面があるので、片側面分の 2 倍の静電容量が合計静電容量に加算されている。

表 2 からストリップライン伝送路に於いて、特性インピーダンスを主に決定付けている部分は側面であることがわかる。後述するが、実際にはストリップライン伝送路の特性インピーダンスは  $48.2 \Omega$  であるので、この概算に於ける計算精度は 20% 程度であると考えられる。

表 2: 解析的手法による静電容量等の概算結果

電極面位置	同軸管	S L 伝送路		
		上面	片側面	下面
$w$ [m]	0.0723	0.0113	0.00348	0.00838
$d$ [m]	0.009	0.007	0.00148	0.032
$C_{part}$ [pF/m]	71.1	14.3	20.8	2.3
$C_{total}$ [pF/m]	71.1	58.2		
$Z$ [ $\Omega$ ]	46.9	57.3		
$Z_a$ [ $\Omega$ ]	49.6			

### 3.3 特性インピーダンス (静電容量) の数値計算

コンピュータによる静電容量の数値計算では、Gauss の定理を応用した。Gauss の定理によれば適当な閉曲面

を作り、その面に直交する電場成分を積分した量は閉曲面内側の電荷量に等しくなる、すなわち、

$$\frac{Q}{\epsilon} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} \quad (19)$$

である。TEM 伝送路で積分を行う場合、電磁波の伝播方向には電場成分は存在しないので、電磁波の伝播方向に垂直な面の積分は無視出来る。

式 (19) から適当な閉曲面上での電場を知ることが必要であることがわかる。電場の計算方法には有限要素法や境界要素法など多々あるが、本発表では一番簡易な有限差分法を採用した。プログラミングは二次元で行い、図 5 に示す断面形状に図 6 に示すような二次元正方形メッシュを切って実行した。メッシュの交点がノードであり、各ノードに於ける電位及び電場が計算される。ノード間隔は  $50 \mu\text{m}$  である。各ノードに於いては電位

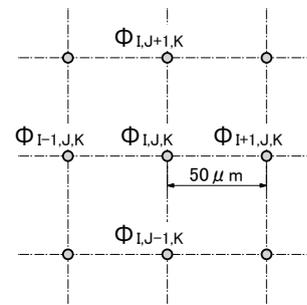


図 6: 二次元有限差分法によるメッシュとノード

の逐次代入が行われ電位値が収束していく。但し、中心電極内部に存在するノードは常に  $100 \text{ V}$ 、外導体内部に存在するノードは常に  $0 \text{ V}$  に固定されている。図 6 中、 $I$  及び  $J$  は空間位置の添え字、 $K$  はイタレーションナンバーである。逐次代入のアルゴリズムは式 (20) に示す通りである。

$$\Phi_{I,J,K+1} = \frac{\Phi_{I-1,J,K} + \Phi_{I+1,J,K} + \Phi_{I,J-1,K} + \Phi_{I,J+1,K}}{4} \quad (20)$$

以上の計算手法により行った電位計算の結果を、図 7 (同軸管) 及び図 8 (ストリップライン伝送路) に示す。図中の白色の部分が中心導体で  $100 \text{ V}$  に固定した部分であり、黒色の部分が外導体で  $0 \text{ V}$  に固定した部分である。計算が行われた部分は白色と黒色の間の空間で、電位は赤色 ( $100-80 \text{ V}$ )、橙色 ( $80-60 \text{ V}$ )、黄色 ( $60-40 \text{ V}$ )、緑色 ( $40-20 \text{ V}$ ) 及び青色 ( $20-0 \text{ V}$ ) で示されている。

各ノードに於ける電場は二次元空間内で微分を行うことによって得られる。電場積分を行うために、図 9 の破線で示すような閉曲面を仮定し、積分を行った。表 3 に数値計算の結果を示す。

表 3 に於いて数値計算された同軸管の特性インピーダンス  $Z$  ( $49.0 \Omega$ ) を理論値  $Z_a$  ( $49.6 \Omega$ 、表 2) と比べると、1% 程度  $Z_a$  が大きいことがわかる。故にこの数値計算に於ける計算誤差は 1% 程度と見積もられることがわかった。

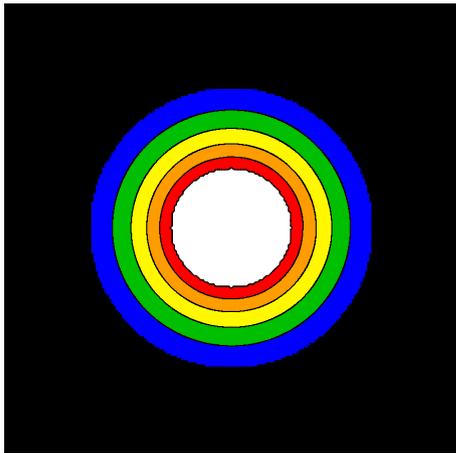


図 7: 有限差分法による同軸管の電位計算

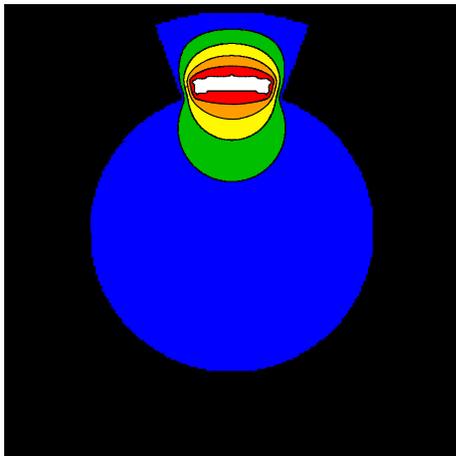


図 8: 有限差分法によるストリップライン伝送路の電位計算

ストリップライン伝送路の特性インピーダンスは  $48.2 \Omega$  と数値計算された。ストリップライン長は検波 RF 波長  $105 \text{ mm}$  ( $2,856 \text{ MHz}$ ) の  $1/4$  波長程度なので  $1.8 \Omega$  のインピーダンスのずれは検出性能に影響しないと思われる。

#### 4. まとめ

二次モーメント測定用の六電極円形断面 BPM を設計した。BPM の開口は  $\phi 32 \text{ mm}$  で、電極占有角は  $30^\circ$  で

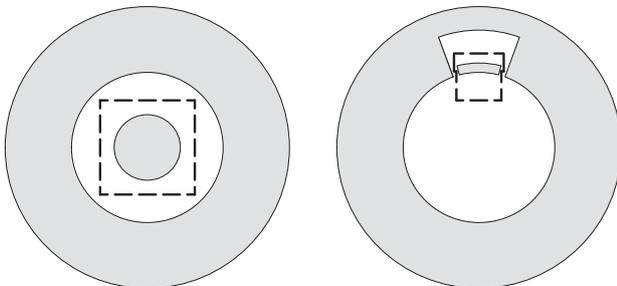


図 9: 電場積分を行うための経路

表 3: 静電容量等の数値計算結果

	同軸管	S L 伝送路
電場積分 [ $V \cdot m/m$ ]	769	782
$Q$ [ $nC/m$ ]	6.81	6.92
電極間電圧 [V]	100	100
$C$ [ $pF/m$ ]	68.1	69.2
$Z$ [ $\Omega$ ]	49.0	48.2

ある。現存の BPM 信号処理回路を使用した場合、測定精度はビーム重心位置の情報として  $10 \mu\text{m}$  程度、ビーム広がり情報として  $400 \mu\text{m}$  程度である。

ストリップライン伝送路の特性インピーダンスを  $50 \Omega$  程度とするために、単位長さ当たりの静電容量を計算し、特性インピーダンスを算出する手法を確立した。単位長さ当たりの静電容量を解析的手法により得るには、平行平板コンデンサ近似を行い概算する。単位長さ当たりの静電容量を精度良く計算するにはコンピュータによる数値計算が不可欠である。本設計では二次元有限差分法により電位・電場を計算し、Gauss の定理を応用して単位長さ当たりの静電容量を精度良く計算した。計算されたストリップライン伝送路の特性インピーダンスは  $48.2 \Omega$  で、数値計算の精度は  $1\%$  程度と見積もられる。

#### 参考文献

- [1] T. Suwada, et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams **6**, 032801 (2003).
- [2] A. Chapman-Hatchett, et al., "A Magnetic Quadrupole Pick-Up for The CERN PS", Proc. 18th Particle Accel. Conf. New York USA, 1999, pp. 2223-2225.
- [3] R. H. Miller, et al., "Nonintercepting Emittance Monitor", Proc. 12th Int. Conf. High-Energy Accel. (HEAC'83) Fermilab USA, 1983, pp. 603-605.
- [4] K. Yanagida, et al., "A BPM System for The SPring-8 Linac", Proc. 20th Int. Linear Accel. Conf. Monterey USA, 2000, pp. 190-192.