

FASCINATING RELATION BETWEEN TORUS KNOT AND ACCELERATOR LATTICE

Shigemi Sasaki[#], Atsushi Miyamoto

Hiroshima Synchrotron Radiation Center, Hiroshima University
2-313 Kagamiyama, Higashi Hiroshima, 739-0046

Abstract

We propose a new scheme of lattice design for a compact storage ring in which a design orbit closes after completing multiple turns. The lattice of this type can be realized by placing bending magnets, quadrupole magnets, and other necessary accelerator components on a projected torus knot in the horizontal orbit plane. The ring with this type of lattice may have larger maximum stored charge if operated in multiple-bunch mode, and longer bunch-to-bunch interval if operated in a single-bunch mode. Also, for an electron storage ring as the synchrotron light source, a larger number of straight sections may accommodate with many insertion devices.

トーラスの結び目と加速器ラティスの魅惑的な関係

1. はじめに

広島大学放射光科学研究センターでは紫外線域(VUV)から軟 X 線域(soft X-ray)までの放射光利用施設の更なる高性能化を目指した次期光源計画を持っている。次期計画の光源リングは、VUV から soft X-ray 領域で最高性能を発揮する第3世代の低エミッタンス高輝度光源である。この波長域に関する要請と、現在の放射光センターの敷地面積の制約から、蓄積リングエネルギーは 1 GeV 以下、リング周長は 50 m 以下の小型リングの建設を目指してこれまで検討を重ねてきた[1]。現時点で、最も設計検討が進んでいるのは、MAX-lab の MAX-III をベースとした、周長約 40 m、蓄積エネルギー 700 MeV、エミッタンス 15 nmrad 以下のリングである。このリングデザインは、小型リングとしては MAX-III と並ぶ世界最高レベルの性能を達成可能であるが、小型リングには中・大型リングにはない制約もある。その制約のいくつかを以下に示すと、リングの周長が小さく、挿入光源を設置する直線部の数と長さを大きくできない、シングルバンチ運転をしてもパルス放射光の時間間隔が短すぎて、放射光利用研究課題の中で実施不可能なものがある、などである。小型リングのこのような制約を取り払うことは原理的に不可能であると思われたが、ちょっとした発想の転換をすることにより、解決策が見つかった。

磁場閉じ込め熱核融合装置であるステラレータやヘリオトロンはドーナツ型の容器(トーラス)にらせん状にコイルを巻いた構造となっている。このコイル構造は、数学上の概念ではトーラスの結び目である。核融合装置では、この形状のコイルはプラズマを真空容器中に閉じ込めるために用いられる。一方、我々はトーラスの結び目の周回性のパターンに着目し、ある種のトーラスの結び目は、これを二次元平面上に投影したものを荷電粒子の軌道とすれば、軌道がリング一周で閉じず、

多数回周回した後に閉じることに気付いた。この、極めて単純な発想の下、そのような粒子軌道を実現するための加速器コンポーネントの実現可能性を探った結果、平面上に投影したトーラスの結び目とトポロジカルに等価の多角形の頂点に偏向電磁石を配置することにより、加速器ラティスとして機能することを見出した。

2. メビウスの帯とトーラス結び目

よく知られているように、メビウスの帯とは図 1 に示すように 1 枚の帯の片方の端を半回転ひねってつないだようなものである。これは数学的には向き付け不可能な 2 次元多様体の一つであり、帯の表と裏の区別がつかない。つまり、帯の表面に線分を描くと帯の長手方向に一周してももとは戻らず、2 周して始点と終点がつながる。

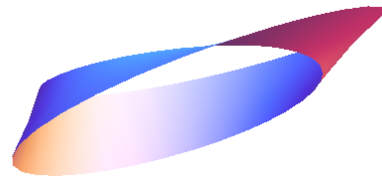


図 1 : メビウスの帯

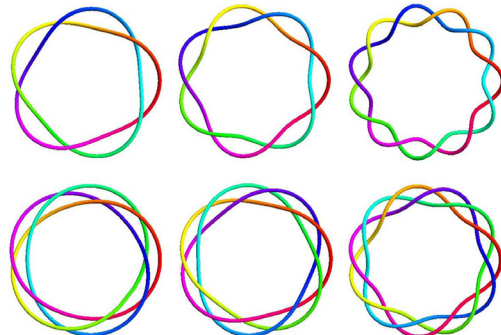


図 2 : トーラスの結び目の例

メビウスの帯と同様の方法で、3周して元に戻る閉曲線を作るには、長くソフトな三角柱の上面と底面を 120° ひねってつなげばよい[2]。このような方法を拡張・一般化して定式化したものがトーラスの結び目である[3]。図2にトーラスの結び目のいくつかの例を示す。これらの例の数学的表式は上段左から、(5,2), (7,2), (11,2)、下段左から(5,3), (7,3), (11,3)となり、 (p,q) の p は図の中心からの回転対称数を表し、 q は何回回って元に戻るかを表している。また、 p と q は互いに素である。

3. 加速器ラティスへの応用

図3に、紙面上に投影した(5,2)と(11,3)トーラスの結び目、及びそれに対応する加速器ラティスの偏向電磁石配置を示す。

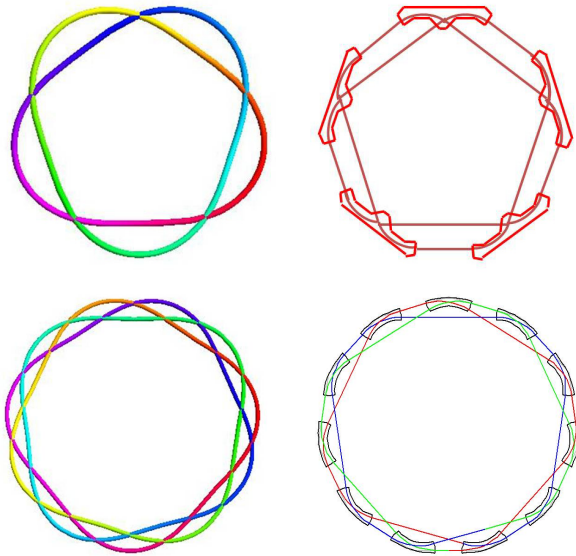


図3：投影したトーラスの結び目と対応する加速器ラティスの偏向電磁石配置例

この図から明らかなように、投影したトーラスの結び目の線分交差点 ((11,3)については外側の線分交差点のみ) に偏向電磁石を配置することにより、加速器ラティスの基本構造が出来上がる。荷電粒子の軌道は偏向電磁石内で交差するが、どちらの軌道についても偏向半径は同じであり、内側から入った軌道は外側に、外側から入った軌道は内側に出るようになっている。

どのようなトーラスの結び目を出発点にしても一旦偏向電磁石の配置が決まれば、後はそれに4極電磁石などの必要な加速器要素を付け加えてラティスを完成させることが出来る。図3のビーム軌道を進んでみれば気付くように、このラティスのユニットセルは二つの電磁石を持つダブルバンド型であり、2周回って軌道が閉じる空間図形的に5回対称のラティスではユニットセルの数は5である。また、3周回って軌道が閉じる11回対称のラティスではユニットセルの数は11で

ある。

図4に、広島大学放射光科学研究センターの次期光源リング HiSOR-II のオプションの一つとして設計した(11,3)トーラスの結び目ラティスの全体配置とユニットセル1個分のラティスを示す[4]。

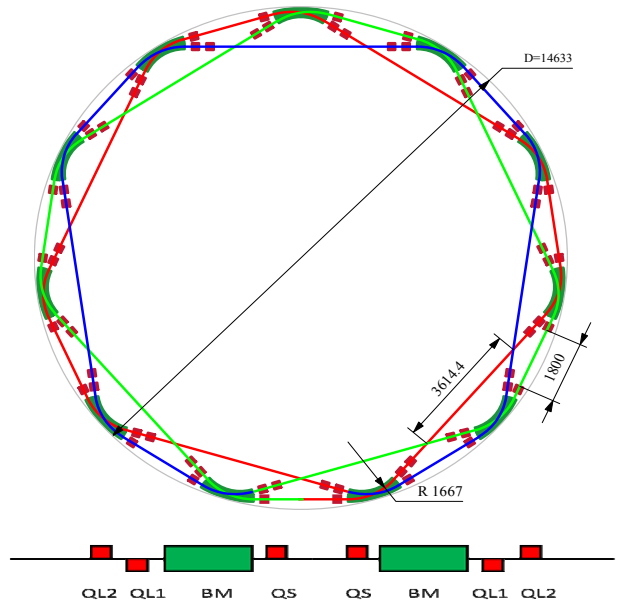


図4：小型放射光源用電子蓄積リングの例: (11,3)トーラスの結び目ラティスの全体構成とユニットセルのラティス

この11角形の空間対称性を持つ小型光源リングは、外周長約46 m、電子ビーム軌道長約130 mであり、内側の11個の長直線部は3.6 mの長さがあり、ビーム入射部やRF加速空洞を外側の短直線部(1.8 m)に設置すれば、全ての長直線部に全長2.5 mを超えるアンジュレータを挿入可能である。

図5にトーラスの結び目ラティスを用いたHiSOR-II光源リングシステムの完成予想図を示す。

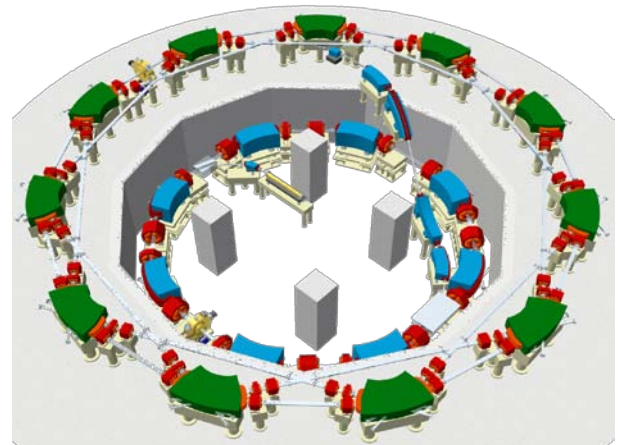


図5：HiSOR-II光源リングのレイアウト想像図

本節の中で先に記したように、(11,3)ラティスはダブルバンドのユニットセルが11個で閉じる構

造であるが、実空間ではビーム軌道1周期の間に同じ偏向電磁石を2度通るいわば縮退した構造となっている。このため、安定ビーム軌道の実空間の座標を用いた解析[5]には多少の工夫が必要であると思われる。しかし、実際の加速器コンポーネントの製作には、偏向電磁石の良好磁場領域を広げる方策を講じることなどが必要なことを除いて、全て既存の技術で対応可能であることを指摘しておく。

4. 更なる発展の可能性

数学概念としてのトーラスの結び目 (p,q) は、 p と q をいくらか大きくすることができる。大きな p, q を持つトーラスの結び目を2次元平面に投影した形を持つビーム軌道を想像することは容易であるが、前節までに述べたように軌道の交差点に一個一個偏向電磁石を置くことは非現実的である。一例として図6に、 $(11,6)$ トーラスの結び目を平面に投影したビーム軌道を示す。

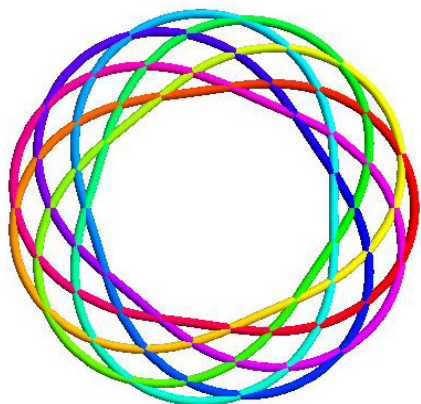


図6：平面に投影した $(11,6)$ トーラスの結び目

この図から明らかのように、ビーム軌道交差点の位置は、中心から動径方向に5つのレイヤー構造となっている。すなわち：

$$\text{Number of Layer} = q - 1.$$

である。また、外周を構成している11個の円弧（厳密には円弧に近い曲線）は全て同じ曲率（厳密には同じ曲率の変化率）を持っていることが分かる。これら二つの関係は、 p, q を大きくしても成り立つ。

以上の事実から、光源リングへの適用を離れて大胆な想像をすれば、内側から2番目のレイヤーの交差点から外側の全ての交差点を含むようなドーナツ状の一体の偏向電磁石を用いることにより、偏向電磁石への入射角のみを唯一のパラメータとして、任意の回数周回して元に戻る非常に長い周回軌道をコンパクトな空間に作る事が出来るのではないと思われる[6]。もしこのようなことが原理的に可能なら、従来型の蓄積リングに比べて桁違いに大きな電荷量を蓄積できる可能性がある。

もう少し現実的な可能性としては、たとえば図4のラティスの直線部の一部を延長して長直線部

を作ることによりレーストラック様のラティスを作り、ERLのような加速器の電子周回部として利用することも可能である。この場合には長直線部の加速管で加速された電子ビームは3回周回した後に、同じ加速管の逆位相に入れてダンプされる。

5. まとめ

広島大学放射光科学研究センターでは、これまで、次期光源リングの設計検討を行ってきた。その中で我々は、加速器ラティス設計の従来する方法とは一線を隔す新しいアイデアを見出した。

従来のリング型加速器では、リングの周長と荷電粒子軌道長は等しいが、トーラスの結び目を平面に投影したものとトポロジカルに等しい軌道を描くラティスを作れば、リングの外周長の2倍、3倍、4倍等のビーム軌道長を実現できることが明らかになった。

このラティスのリングでは、ビーム軌道長が従来型のリングより格段に延びることにより、多バンチ運転をした場合には軌道1周に蓄積できる電荷量も軌道長に比例して格段に大きくなる。また、単バンチ運転ではバンチ間隔が大幅に延びる。

放射光利用のための小型光源リングとしてこのラティスを採用すれば、自由な長直線部の数が増すため、多くの挿入光源を設置できるほか、単バンチ運転による放射光パルスを利用して、従来の小型リングでは実現不可能だったARTOF型光電子分光実験も可能となる。

この新しいリング型加速器ラティスは、放射光源リングに限らず、小型でかつ多くの荷電粒子を蓄積できることが望まれるような加速器応用分野（たとえば医療用加速器など）への利用をはじめとする多くの加速器応用分野への適用可能性を秘めている。

参考文献

- [1] 佐々木茂美, 宮本篤: 日本放射光学会誌「放射光」, Vol.24, No.4, p182, July, 2011.
- [2] For example, see the link below: http://www.spektrumdirekt.de/sixcms/list.php?article_id=773622&page=fe_seiten&skip=1.
- [3] C.C. Adams: The Knot Book, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.
- [4] 宮本篤, 佐々木茂美: in these proceedings.
- [5] S. Kamada: private communication in this conference.
- [6] M. Wakasugi: private communication in this conference.