CONSIDERATION OF COD CORRECTION WHEN BPM AND QUADRUPOLE MAGNET ARE SYNCHRONOUSLY MISALIGNED

Yuji Seimiya*, Kazuhito Ohmi, Susumu Kamada, Akio Morita, Katsunobu Oide,
SOKENDAI and KEK
1-1, Oho, Tsukuba, Ibaraki, 305-0801

Abstract

Accelerators, which are designed so that vertical dispersion equal zero, are considered. Since real accelerators have errors, vertical dispersion do not equal zero. One of reasons why vertical dispersion is not zero is transverse misalignment of Quadrupole Magnet (QM). BPM can be calibrated to the center of QM by minimizing the orbit shift when quadrupole magnetic field strength is changed in KEKB and PF. We estimate the misalignment referring to design orbit.

BPM と QM の設置誤差が同期している際の軌道補正の考察

1． INTRODUCTION

KEKB や PF では QM の中心と BPM の基準点を一致させるよう較正している [1]。そのため、QM と BPM の設置誤差が一致していると仮定し、設計軌道からの設置誤差を計算する。これは、QM の位置における設計軌道を求めることと同じである。QM の設置誤差を正確に計算できれば、ステアリングの磁場を QM の磁場に重ね合わせ、QM の設置誤差によって発生するキックをちょうど打ち消すようにステアリングの強さを決めると、QM の設置誤差による 2 次以上の非線形効果が無視できる場合、ビームは設計軌道を通るはずである。

SuperKEKB や PF の場合、6 極以上の磁石の設置誤差や磁石の回転誤差は、その設置誤差や回転誤差がある程度小さい場合、軌道に大きな変化を与えない。例えば、KEKB での磁石の設置誤差、回転誤差はそれぞれ約 0.15mm、0.1mrad 程度であることがわかっている [1]。シミュレーション上、この程度の誤差ならば SuperKEKB においても軌道への影響はほとんどない。注意が必要なのは、6 極以上の磁石に設置誤差があることによる軌道への影響は小さいが、6 極以上の磁石があることによる軌道への影響は小さくないことである。

本研究では、デザインラティスとして PF 及び SuperKEKB のラティスを用いる。磁石のエラーは、QM の垂直および水平方向の設置誤差のみがあるものとする。また、BPM の測定誤差はないものとし、BPM は QM の端部に設置されているとする。磁石の強さについてはエラーがないものとする。ここで、本論文でよく用いられる設定を次のように呼ぶことにする。

- 設定 A : QM と BPM の設置誤差が一致している
- 設定 B : BPM は設計軌道上にあり、QM のみ設置誤差がある

2． QM の設置誤差の計算方法

ビームの運動は 2 階の非線形微分方程式で書ける。この方程式は解析的に解く事は難しくても、数値的に計算できる。設定 A の場合、図 1 の位置関係から N 個の BPM のある場所で次の N 次元のベルトル方程式が成り立つ。

$$\boldsymbol{x}_{COD} \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_{BPM} + \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}_{BPM} \equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) \quad (1)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_0 \quad (2)$$

$\boldsymbol{f}$ 及び $\boldsymbol{g}$ は、それぞれ QM の設置誤差 $\boldsymbol{x}_0$ から生じる

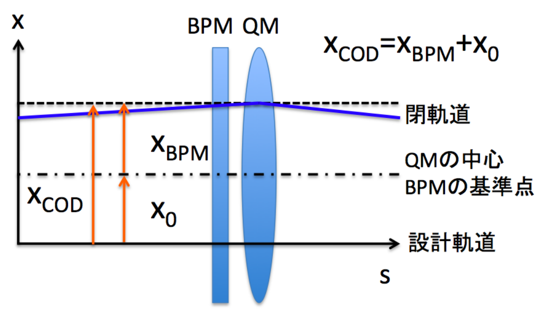

図 1: 設定 A の際の軌道、QM と BPM、設計軌道の位置関係

COD 及び BPM の読出値である $\boldsymbol{x}_{COD}$、$\boldsymbol{x}_{BPM}$ への写像と定義する。$\boldsymbol{x}_0$ は、N 次元の Newton-Raphson 法を用いて以下の反復計算をすればよい。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_0^{k+1} &= \boldsymbol{x}_0^k + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0^k)}{\partial \boldsymbol{x}_0^k}\right)^+ \{-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0^k) + \boldsymbol{x}_{BPM}\} \quad (3)\\ &= \boldsymbol{x}_0^k + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0^k)}{\partial \boldsymbol{x}_0^k} - I\right)^+ \{-(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0^k) - \boldsymbol{x}_0^k) + \boldsymbol{x}_{BPM}\}\end{aligned}$$

上付きの ^{k} は反復回数を、$^+$ は疑似逆行列を表している。測定可能な量は $\boldsymbol{x}_{BPM}$ のみであり、$\boldsymbol{f}$ はラティスから決まる関数である。疑似逆行列を求める際は、特異値分解 [2, 3] を用いる。

議論を簡単にするため、QM と BPM の数は同じであることにする。そのため、これ以降は疑似逆行列ではなく、単なる逆行列を扱うことにする。Newton 法が収束

* seimiya@post.kek.jp

するか否かは初期値にも依存するため、非線形性が強い場合にはうまく初期値を設定する必要がある。逆に、線形ならば解は一意に決めることができる。ここで、QM の設置誤差の初期値は 0 を用いる。なお、設定 B の場合は Eq. (3) の $\boldsymbol{g}$ を $\boldsymbol{f}$ に置き換えればよい。

3． 条件数とスペクトル半径

3.1 条件数

すでに述べたように、我々は逆行列を解く必要があるのだが、その際重要になってくるのが条件数 [4] である。条件数 cn とは線形逆問題を解く際、どの程度の誤差が伝搬し得るかを表す量である。あるベクトル方程式、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

に対して次の関係が成り立つ。

$$\frac{||\Delta \boldsymbol{x}_b||}{||\boldsymbol{x}||} \leq cn\frac{||\Delta \boldsymbol{b}||}{||\boldsymbol{b}||},\ \frac{||\Delta \boldsymbol{x}_A||}{||\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}_A||} \leq cn\frac{||\Delta A||}{||A||} \tag{5}$$

$$cn = ||A||||A^{-1}|| \tag{6}$$

ここで、cn は A の条件数、ベクトル $\boldsymbol{x}$ については $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N}|x_j^2|/N}$、行列 A については $||A|| = \max\frac{||A\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}||}(\boldsymbol{x} \neq 0)$、$\Delta \boldsymbol{x}_b$ は $\boldsymbol{b}$ に $\Delta \boldsymbol{b}$ だけ誤差を与えたときの $\boldsymbol{x}$ からのずれ、$\Delta \boldsymbol{x}_A$ は A に ΔA だけ誤差を与えたときの $\boldsymbol{x}$ からのずれを表す。このとき、条件数は特異値の最大 ÷ 最小でも与えられる。Eq. (5) から分かるように、条件数が大きいということは、それだけ解 x を推定する際の誤差が大きくなる可能性があるということになる。例えば、分解能が 1μm の BPM があったとして、COD の大きさが 1mm 程度だったとすると、相対誤差は 10^{-3} となる。そのため、条件数が 10^3 を超えるような場合、Eq. (5) の右辺は 1 を超えてしまい、有意な解が存在しない場合がある。このような場合には、条件数が小さくなるよう特異値に対してしきい値を設定することで、ある程度の近似解が得られる可能性がある。特異値をどのように打ち切るかという方法は何通りかあるが、その一つとして次のようなものがある。

$$\omega_i^{-1} \equiv \begin{cases} \omega_i^{-1} & (\omega_i \geq \epsilon\omega_{max}) \\ 0 & (\omega_i < \epsilon\omega_{max}) \end{cases} \tag{7}$$

ϵ はしきい値であり、ω_{max} は特異値の最大値を表す。

3.2 スペクトル半径

反復法、ここでは Newton 法が収束するかしないかということは、反復行列のスペクトル半径 [4] を調べればよい。スペクトル半径とは、反復式

$$\boldsymbol{x}_0^{k+1} = M\boldsymbol{x}_0^k + \boldsymbol{c} \tag{8}$$

の反復行列 M の固有値の絶対値の最大値のことであり、M が $\boldsymbol{x}$ の関数でない場合にはこれが 1 を超えないとき必ず収束する。$\boldsymbol{c}$ は定数ベクトルである。QM の設置誤差を求めるための反復行列 M は、$\boldsymbol{x}$ の関数であるため必ず収束するとはいえないがある程度の目安として用いることができる。経験上、多くの場合この目安はよく機能する。

設定 A の場合、反復式は Eq.(3) を変形し、次のように書ける。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_0^{k+1} &= \boldsymbol{x}_0^k \\ &\quad - \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0^k)}{\partial \boldsymbol{x}_0^k}\right)^{-1} \{\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}_0}\right)|_{\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_{0C}}\ (\boldsymbol{x}_0^k - \boldsymbol{x}_{0C})\} \\ &= M_G^{-1}\left(M_G - M_{G,C}\right)\boldsymbol{x}_0^k + M_G^{-1}M_{G,C}\boldsymbol{x}_{0C}\end{aligned} \tag{9}$$

x_0 または x_{0C} は、推定した QM の設置誤差または設定した QM の設置誤差を表し、$M_G = \partial_{\boldsymbol{x}_0^k}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0^k)$、$M_{G,C} = \partial_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|_{\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_{0C}}$ である。Eq. (9) の反復行列から、QM の設置誤差の推定値が設定値から遠ければ遠い程、非線形性が強ければ強い程、スペクトル半径は大きくなると推測される。設定 B の場合は、Eq. (9) の $G, \boldsymbol{g}$ を $F, \boldsymbol{f}$ に置き換えればいい。

4． QM の設置誤差の推定 (PF リング)

4.1 ある程度 QM の設置誤差が小さい場合

PF リングには 78 台の QM があるため、水平、垂直方向を含め、反復行列は 156 × 156 の行列となる。Eq. (3) で記述した方法で QM の設置誤差を推定したものが図 2 になる。青と赤の点、つまり QM の設置誤差の設定値と推定値、さらにそれらの設置誤差から発生する軌道がほぼ一致していることがわかる。図 2 の中の「truncated」は特異値をあるしきい値で打ち切ったときの値であり、今はしきい値を設定していないため「non-truncated」の値と一致している。また、スペクトル半径は Newton 法の反復操作の 1 回目、つまり Eq. (3) で $k = 0$ のときのものを、条件数については、値が収束した後の反復行列から計算した値を載せている。

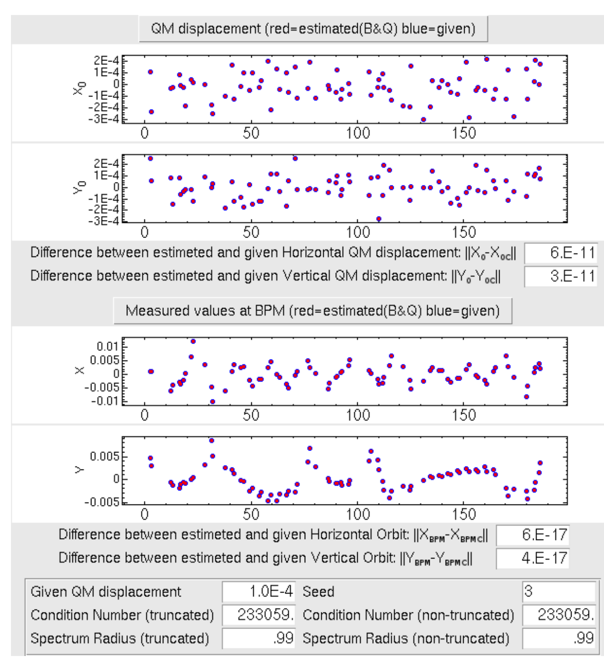

図 2: 設定 A を用いた際の QM の設置誤差、軌道の設定値と推定値との比較 ($||\boldsymbol{x}_0|| = 1 \times 10^{-4}$m)

4.2　ある程度 QM の設置誤差が大きい場合

SAD[5] では COD を計算する際、初期値をうまく選ぶかステアリングの強さをうまく設定しなければ、PF リングの場合には QM の設置誤差が 1×10^{-4}m を超えると、次第に COD が決まらないことが多くなる。また、図 2 のスペクトル半径は 0.99 と 1 を超えないぎりぎりの値になっている。そこで、ステアリングの強さをうまく調整し、QM の設置誤差が大きい場合についても COD が決まるようにする。さらに、ステアリングによって COD が小さくなれば、ビームの受ける非線形性も小さくなるため、スペクトル半径も小さくなると期待できる。

ステアリングの強さについては、BPM の読出値を 0 に近づけるように設定する。この際も Newton 法を用いるが、Eq. (3) のベクトル変数 $\boldsymbol{x}_0$ をステアリングの強さに、$\boldsymbol{x}_{BPM}$ を 0 に置き換えるだけである。その後、ステアリングによってある程度うまく補正された $\boldsymbol{x}_{BPM}$ を Eq. (3) の計算の際に用いればよい。このとき、ステアリングの値を設定したため、Newton 法に用いる QM の設置誤差の初期値をうまく設定しなければ多くの場合 COD が決まらなくなってしてしまう。そのため、まずはデザインラティスをなるべく線形化したラティスを用いて、QM の設置誤差を計算する。その後、推定した QM の設置誤差を Newton 法の初期値にし、元のデザインラティスを用いて設置誤差を再計算すると図 3 のように設定値を推定することができる。また、いくつかの Seed(疑似乱数を発生させるための種) で試した結果を表 1 に示す。上の表は設定 A を用いた場合、下の表は設定 B を用いた場合に対応している。 設定 A を用いた場合、設定 B を用いた場合より残差、スペクトル半径、条件数が大きい。条件数が大きいと計算誤差が大きくなるため、残差 (x, y) も大きくなっている。

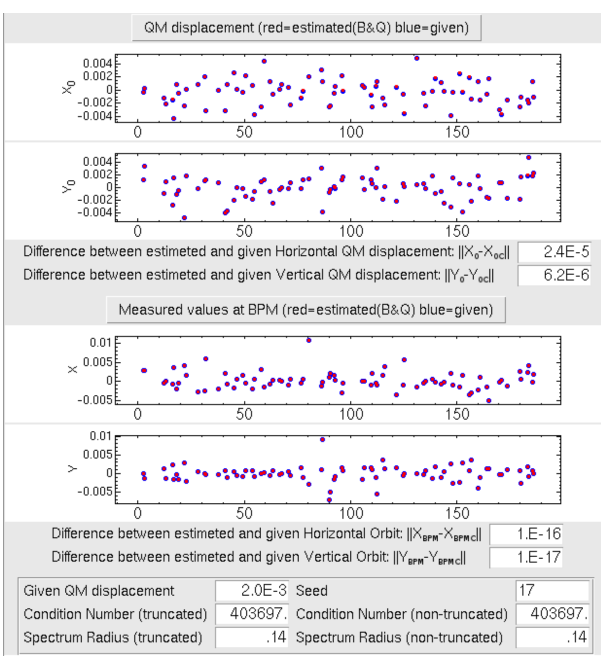

図 3: 設定 A を用いた際の QM の設置誤差、軌道の設定値と推定値との比較 ($||\boldsymbol{x}_0|| = 2 \times 10^{-3}$m)

表 1: PF リング (上の表：設定 A、下の表：設定 B)：いくつかの Seed(SD) で QM の設置誤差 ($\boldsymbol{x}_0$) を設定したときの、QM の設置誤差の推定値と設定値との差 (残差)、スペクトル半径 (SR)、条件数 (CN)。SR、CN の欄の括弧内の数値は、特異値をある値で打ち切ったときの値である。設置誤差、残差の単位は m である。

$\|\|\boldsymbol{x}_0\|\|$	SD	残差 (x,y)	SR	CN
1E-3	63	(7.4E-5,6.5E-6)	0.11(-)	3.2E6(-)
1E-3	71	(2.1E-5,2.1E-6)	0.28(-)	8.9E5(-)
2E-3	9	(3.8E-5,3.1E-6)	0.41(-)	8.9E5(-)
2E-3	15	(1.0E-5,3.4E-6)	0.75(-)	2.7E5(-)

$\|\|\boldsymbol{x}_0\|\|$	SD	残差 (x, y)	SR	CN
1E-3	63	(3.0E-8,1.3E-8)	0.002(-)	1.8E3(-)
1E-3	71	(2.6E-8,2.0E-8)	0.007(-)	1.9E3(-)
2E-3	9	(1.1E-7,5.9E-8)	0.12(-)	6.1E3(-)
2E-3	15	(1.1E-7,5.4E-8)	0.09(-)	3.5E3(-)

4.3　エミッタンス計算

推定した QM の設置誤差だけ設置誤差を修正した際の COD、垂直ディスパージョン、エミッタンスを求める。これは、QM の設置誤差によって発生する非線形成分が十分小さい場合、ステアリングを QM の位置に設置し、QM の設置誤差からくるキックをちょうど打ち消すようにステアリングの強さを決めることとほぼ同じである。このようにして計算された COD、垂直ディスパージョンは図 4 になる。また、いくつかの Seed についてのエミッタンス計算結果を表 2 に示す。

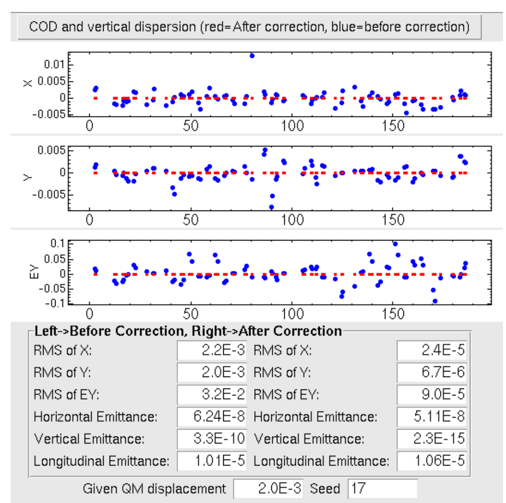

図 4: 設定 A を用いて推定した QM の設置誤差だけ設置誤差を修正した際の COD、垂直ディスパージョン

5．QM の設置誤差の推定 (SUPERKEKB リング)

5.1　ある程度 QM の設置誤差が小さい場合

SuperKEKB リングには 455 台の QM があるため、反復行列は 910×910 の行列となる。PF のときと同様に

表 2: 表 1 の QM の設置誤差を与えたときのエミッタンス (上の表) と、設定 A を用いて推定した QM の設置誤差だけ設置誤差を修正したときのエミッタンス (下の表)。PF の設計上 (エラーなし) のエミッタンスは、$(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z) = (5.1\text{E-}8, 0, 1.1\text{E-}5)$m である。

$\|\|\boldsymbol{x}_0\|\|$	SD	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z
1E-3	63	5.3E-8	8.5E-11	1.0E-5
1E-3	71	5.3E-8	1.0E-9	1.1E-5
2E-3	9	7.2E-8	4.4E-9	1.0E-5
2E-3	15	6.1E-8	1.4E-9	1.0E-5

$\|\|\boldsymbol{x}_0\|\|$	SD	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z
1E-3	63	5.0E-8	8.3E-15	1.1E-5
1E-3	71	5.1E-8	9.7E-16	1.1E-5
2E-3	9	5.1E-8	1.2E-15	1.1E-5
2E-3	15	5.1E-8	2.3E-15	1.1E-5

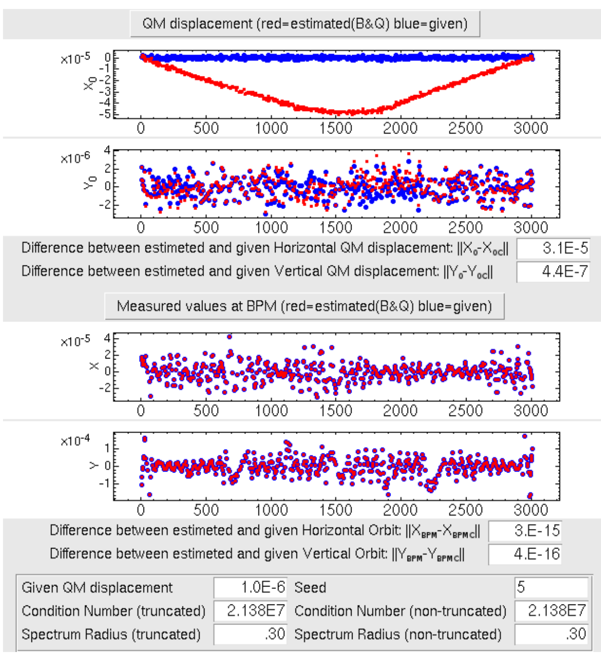

図 5: 設定 A を用いた際の QM の設置誤差、軌道の設定値と推定値との比較 ($||\boldsymbol{x}_0|| = 1 \times 10^{-6}$m)。特異値に対してしきい値を設定していない場合

特異値を打ち切らずに計算すると、多くの場合、図 5 のようになる。QM の設置誤差の推定値は設定値とかけ離れてはいるが、軌道はほぼ完全に再現されている。これは、SuperKEKB は PF に比べ非線形性が高いため、必ずしも解が 1 つに決まらないという一例である。現実問題として、どちらが本来の QM の設置誤差であるかは数値計算だけでは判別できない。ただし、Newton 法における QM の設置誤差の初期値として 0 を用いているため、設定値より大きな値に収束しているのは計算誤差が原因と考えられる。そのため、一番誤差が生じると思われる反復法の初めの数回だけ、条件数を小さくするように Eq. (7) のように特異値をある値で打ち切ることで、計算誤差を小さくし QM の設置誤差の推定値が設定値に近づくようにする。これは、反復回数が少ないときの方が QM の設置誤差の推定値が大きく変動し、計算誤差が生じ易いためである。図 6 は、反復回数が小さいときにはしきい値を 1×10^{-4} にし、反復回数が増えるごとに徐々にしきい値を小さくしていった結果を示す。

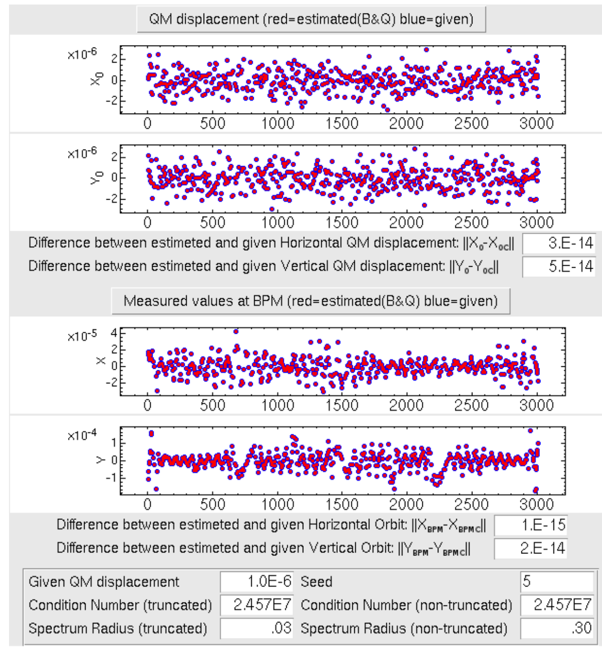

図 6: 設定 A を用いた際の QM の設置誤差、軌道の設定値と推定値との比較 ($||\boldsymbol{x}_0|| = 1 \times 10^{-6}$m)。特異値に対してしきい値を設定した場合

5.2 ある程度 QM の設置誤差が大きい場合

SuperKEKB では、ステアリングをうまく調整するか Newton 法の初期値をうまく選ばないと、QM の設置誤差が 1×10^{-5}m を超えると次第に COD が決まらないことが多くなるが、PF のときと同様に、ステアリングの強さをうまく調整すると QM の設置誤差がある程度の大きい場合でも COD を求めることができる。このとき PF のときと同様に、ステアリングの値を設定したため Newton 法に用いる QM の設置誤差の初期値をうまく設定しなければ、多くの場合 COD が決まらなくなってしてしまう。この問題を解決するために、PF の場合にはデザインラティスにある程度の線形化を施したラティスを用いて QM の設置誤差を推定後、そこで求めた設置誤差を Newton 法の初期値にし、元のデザインラティスを用いて設置誤差を再計算した。一方、SuperKEKB の場合そのような手順を踏んだとしても COD が決まらないことが多い。そのため、まずはデザインラティスをある程度線形化したラティスを用いつつ、先に求めたステアリングの強さまで徐々にステアリングの強さを大きくしていくことで QM の設置誤差を推定する。その後、その推定した QM の設置誤差の推定値を Newton 法の初期値にし、元のデザインラティスを用いて QM の設置誤差を再計算すると、図 7 のように設定値を推定することができる。表 3 は、いくつかの Seed で試した結果である。上の表は設定 A を用いた場合、下の表は設定 B を用いた場合に対応している。 設定 A を用いた場

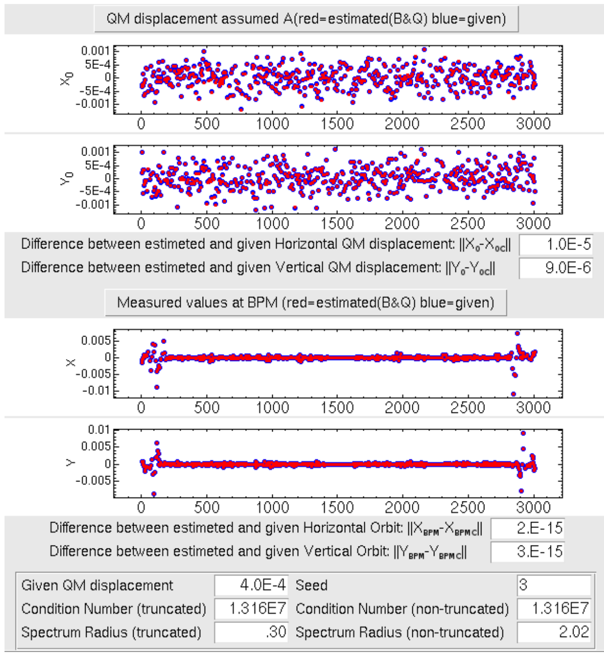

図 7: 設定 A を用いた際の QM の設置誤差、軌道の設定値と推定値との比較 ($||\boldsymbol{x}_0|| = 4 \times 10^{-4}$m)

表 3: SuperKEKB リング (上の表：設定 A、下の表：設定 B)：表 1 の説明文を参照

$\|\|\boldsymbol{x}_0\|\|$	SD	残差 (x,y)	SR	CN
2E-4	15	(4.2E-6,5.7E-7)	1.50(0.12)	9.9E6(-)
2E-4	63	(3.3E-6,5.7E-7)	0.94(0.10)	1.7E7(-)
4E-4	3	(1.0E-5,9.0E-6)	2.02(0.30)	1.3E7(-)
4E-4	71	(1.6E-7,4.6E-7)	3.23(0.49)	1.8E7(-)

$\|\|\boldsymbol{x}_0\|\|$	SD	残差 (x,y)	SR	CN
2E-4	15	(4.7E-6,7.9E-6)	0.04(0.02)	2.0E7(-)
2E-4	63	(4.6E-6,7.1E-6)	0.06(-)	1.3E7(-)
4E-4	3	(3.1E-5,4.5E-5)	0.21(-)	1.8E7(-)
4E-4	71	(3.0E-5,3.7E-5)	0.67(-)	5.4E7(1.7E7)

合、PF のときに比べ、誤差、条件数に大きな変化は見られない。ただし、PF のときと同様にスペクトル半径が大きくなっている。スペクトル半径が 1 を超えているものもあるが、これはしきい値を設定しないと高確率で値が発散することを意味している。

5.3 エミッタンス計算

PF のときと同様に、QM の設置誤差の推定値だけ設置誤差を修正する。このようにして計算された COD と垂直ディスパージョンは図 8 になる。また、いくつかの Seed についてのエミッタンス計算結果を表 4 に示す。

6． CONCLUSION

BPM と QM の設置誤差が一致している際、BPM の読出値から設計軌道を逆算することができた。さらに、QM の設置誤差によるキックを打ち消すように、同じ場所にあるステアリングの強さを決めることで、計算誤差の範囲内で実際に設計軌道を再現することができ、垂直エミッタンスも小さくすることができた。

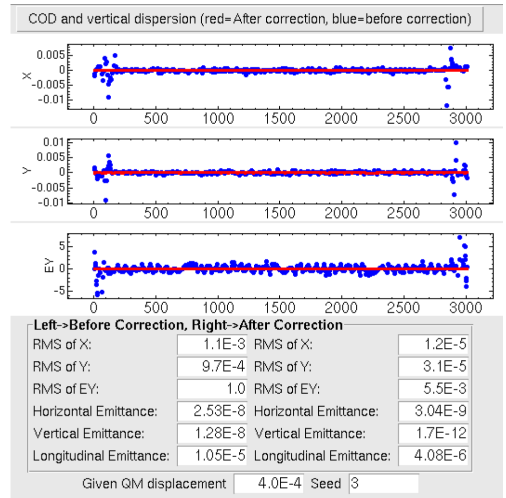

図 8: 設定 A を用いて推定した QM の設置誤差だけ設置誤差を修正した際の COD、垂直ディスパージョン

表 4: 表 3 の QM の設置誤差を与えたときのエミッタンス (上の表) と、設定 A を用いて推定した QM の設置誤差だけ、QM の設置誤差を修正したときのエミッタンス (下の表)。SuperKEKB の設計上 (エラーなし) のエミッタンスは、$(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z) = (3.0\text{E-}9, 9.1\text{E-}13, 4.1\text{E-}6)$m である。(使用したラティスファイル:lerfqlc_1427)

$\|\|\boldsymbol{x}_0\|\|$	SD	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z
2E-4	15	2.9E-9	2.0E-9	4.1E-6
2E-4	63	1.2E-8	1.3E-8	3.7E-6
4E-4	3	2.5E-8	1.3E-8	1.1E-5
4E-4	71	5.2E-9	1.5E-9	4.7E-6

$\|\|\boldsymbol{x}_0\|\|$	SD	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z
2E-4	15	3.0E-9	9.1E-13	4.1E-6
2E-4	63	3.0E-9	9.2E-13	4.1E-6
4E-4	3	3.0E-9	1.7E-12	4.1E-6
4E-4	71	3.0E-9	9.2E-13	4.1E-6

参考文献

[1] KEK Preprint 2001-157 December 2001 A, "KEKB Accelerator Papers"

[2] William H. Press, et al., "NUMERICAL RECIPES IN C", section 2.9

[3] A. Morita, "初等ビーム力学から Optics Correction 入門", KEK seminar Oho, Tsukuba, 2004.

[4] M. Mori, "数値解析法", 朝倉現代物理学講座-7

[5] http://acc-physics.kek.jp/SAD/