STUDY ON ELEMENT STRUCTURE DEPENDENCY FOR HIGH-PRECISE FEM ANALYSIS OF RF CAVITY

Shinya SASAKI* A), Fumito SAKAMOTO A), Shugo HIRASAWA A)
A) Akita National College of Technology
1-1 Bunkyocho, Iijima, Akita, Akita, 011-8511

Abstract

We are developing a high-precise numerical analysis code for overall simulation of electron linear accelerator. Our simulation code consists of static electric and magnetic field solver, frequency domain electromagnetic field solver and time domain electromagnetic field solver. In this paper, we will report on mesh form effects to analysis precition. The numerical method we adopted is Finite Element Method (FEM) with secondary-order quadriateral element. An advantage of the use of quadriateral elements is that it is corresponded to the element used on electron-beam dynamics. With analyzation of spherical cabity model by our code, the code could analyze electromagnetic field in enough precision to design 10-12 GHz resonance cabity. We concluded that an error in calculation doesn't depend on solution methods of generalized eigenvalue problem because we found no fluctuation of solution caused by defference of it. We will consider the way to fill fields with optimized meshes for analyzed models and reduce the calculation time with parallel calculation processing. In addition, the quadriateral element has difficulty in partitioning fields compared to triangular element so that we compared each elements in terms of the precision and the calculation time.

高周波加速空洞の高精度解析のための有限要素解析における要素形状に関する検討

1． はじめに

加速器設計には設計の効率化や最適化・低コスト化のためにコンピュータによるシミュレーションが行われている。今日広く使われているシミュレーションソフトとして SuperFish が挙げられるが、設計に必要となる時間領域におけるシミュレーションを行うことが出来ないため、その際には SuperFish の解析結果を入力して他のソフトウェアで解析を行う必要がある。

本研究室では高周波加速空洞におけるビームダイナミクスを高精度に解析するための解析プログラムを作成している [1]。このプログラムは電磁石や DC 電子銃等の静電磁場解析と空洞の周波数領域解析、電子ビームのダイナミクス解析をシームレスに実行できることを目指している。本研究では電磁場の周波数領域解析を行うプログラムを開発し、要素形状が解析に与える影響について考察した。

数値解析手法は有限要素法を採用し、四角形二次要素を使用した。四角形要素は電子ビームのダイナミクス解析において使用する時間領域差分法と要素情報を共有できるため、シームレスな解析の実現に向いている。開発したプログラムで加速空洞を模擬した球状空洞モデルを解析し、その性能について検討した。また本研究室では三角形二次要素を使用したプログラムも開発しているため、四角形要素を使用したプログラムと解析精度や解析時間に関して比較・検討した。

2． 計算原理

ここでは加速空洞を軸対称であるとし、座標系を円筒座標系で取り扱う。また、磁場に関しては θ 成分 H_θ のみが存在する TM モードを考える。

電磁場の有限要素解析を行うために、(1) 式に示す円筒座標系での磁場に関するヘルムホルツ方程式の汎関数を四角形二次要素で離散化する [2]。

$$J[H_\theta] = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{H_\theta}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \left(\frac{H_\theta}{r}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H_\theta^2 \right\} 2\pi r dr dz \tag{1}$$

また、離散化のために磁場の関数 H_θ を、内部での磁場分布を各節点での磁場の強さで二次近似した要素の集合として以下のように近似する。

$$H_\theta = \sum_{I=1}^{N}\sum_{i=1}^{8} H_{\theta_i} N_i \tag{2}$$

ここで N は要素数、I はある要素、i は要素内での局所節点番号、H_{θ_i} は節点 i での磁場の強さ、N_i は節点 i での補間関数である。関数 H_θ を (2) 式のように近似することで、汎関数 $J[H_\theta]$ の変分が 0 になる条件 ($\delta J = 0$) が関数 $J(H_{\theta 1}, H_{\theta 2}, \cdots, H_{\theta n})$ が極値をとる問題となる。それを行列で表記すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial H_{\theta 1}} \\ \frac{\partial J}{\partial H_{\theta 2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial H_{\theta n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表すことが出来る。ここで $H_{\theta 1}, H_{\theta 2}, \cdots, H_{\theta n}$ は各節点での磁場の強さを表し、n は全節点数を表す。

* gon230708@gmail.com

(2) 式、(3) 式を (1) 式に適用すると (4) 式に示すような一般化固有値問題に帰着する。

$$\mathbf{A}\mathbf{H}_\theta = \lambda \mathbf{B}\mathbf{H}_\theta \tag{4}$$

ここで、$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ はそれぞれ節点の座標によって決定する係数行列、λ は固有値で $(\omega/c)^2$ を表し、$\mathbf{H}_\theta$ は各節点における磁場強度のベクトルで

$$\mathbf{H}_\theta = \begin{pmatrix} H_{\theta 1} \\ H_{\theta 2} \\ \vdots \\ H_{\theta n} \end{pmatrix} \tag{5}$$

を表す。

この一般化固有値問題を共役勾配法によって解き、最低次の共振周波数とその磁場分布を計算した。共役勾配法は固有値問題を解く数値計算法の一つで、(6) 式に示すレイリー商 $R(\mathbf{H}_\theta)$ の値が最低次の固有ベクトルで最小になることを利用した計算法である [3]。また、その値が最低次の固有ベクトルの固有値となる。

$$R(\mathbf{H}_\theta) = \frac{(\mathbf{H}_\theta, \mathbf{A}\mathbf{H}_\theta)}{(\mathbf{H}_\theta, \mathbf{B}\mathbf{H}_\theta)} \tag{6}$$

最後にマクスウェル方程式から導出した以下の式で、求まった磁場分布から電場分布を計算する。

$$E_r = -\frac{1}{\epsilon\omega}\frac{\partial H_\theta}{\partial z} \tag{7}$$

$$E_z = \frac{1}{\epsilon\omega}\left(\frac{H_\theta}{r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right) \tag{8}$$

3． 解析モデルと解析結果

開発したプログラムの性能評価のために、図 1 に示す曲線を有する加速空洞を模擬した二次元モデルを解析した。

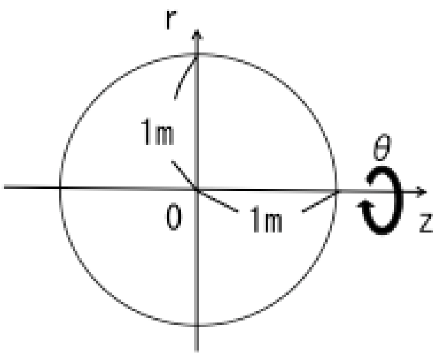

図 1: 解析対象モデル

電磁場の分布が r、z 軸に対して対象になるため、実際の解析では図 1 の右上部分のみを解析した。

解析した電磁場強度の分布を図 2 に、三角形二次要素、SuperFish での解析結果と比較した Z 軸上の電界分布を図 3 に示した。図 2 より、最低次である TM_{01} モードが解析できていることが分かる。また、図 3 から電場分布に関しても良好な一致が確認できる。

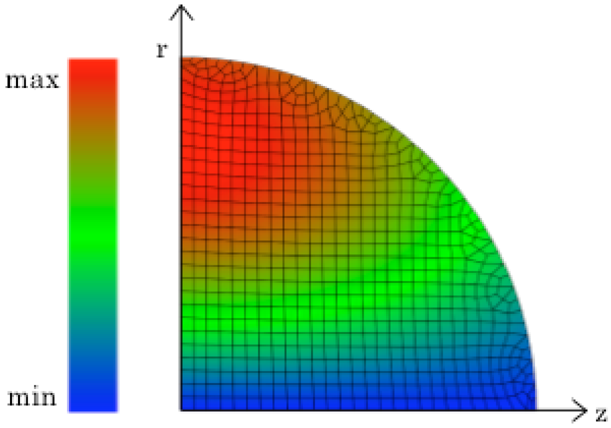

図 2: 解析した磁場分布 (四角形二次要素)

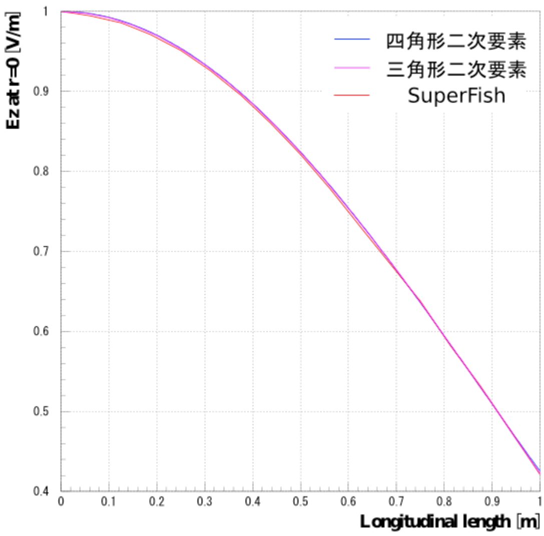

図 3: 解析した電界分布 (z 軸上)

図 4 に要素数に対する固有値の解析誤差の関係を示した。ここで固有値の解析誤差は以下のように定義した。

$$Error = \left|\frac{\lambda_{\text{解析値}} - \lambda_{\text{真値}}}{\lambda_{\text{真値}}}\right| \tag{9}$$

図 4 より、最も誤差が少ない点で 10^{-7} 程度の精度で解析を行うことが出来ていることが分かる。しかし誤差の収束は一様ではなく、要素数の増加に対して誤差が大きくなる点も存在している。これは領域を分割した要素の形状の違いが影響しているだろう。有限要素法では要素の大きさが小さいほど (要素の数が多いほど) 精度が良いとされるが、要素による領域の分割パターンによっても精度が変化することが知られている [4]。図 4 の結果も、要素を小さくした影響よりも分割パターンが変化したことによる影響が大きかったことが原因であると考える。

三角形要素の結果と比較すると、要素数が多くなるにつれて三角形要素のほうが四角形要素よりも精度が

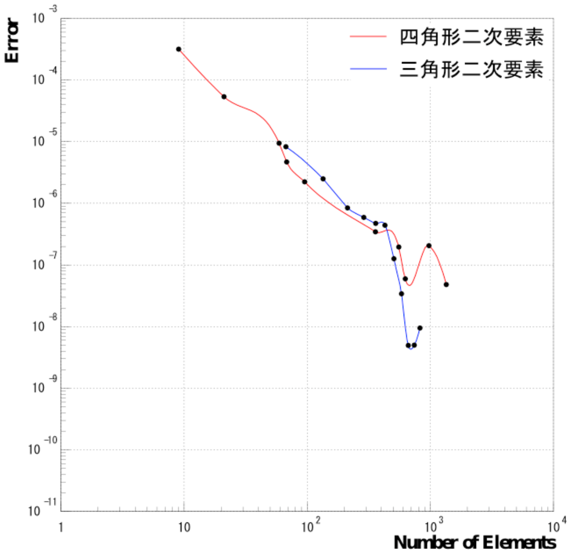

図 4: 要素数と解析誤差の関係

良くなることが分かる。四角形要素は三角形要素に比べて領域の分割が難しいため、要素数の増加により領域を解析に適した要素で分割できなくなったことが影響したと考えられる。要素の歪みも解析精度に影響する指標となるため [4]、要素数が増えても歪みなく四角形要素で分割することが課題となる。

図 5 には要素数に対する解析時間の関係を示した。

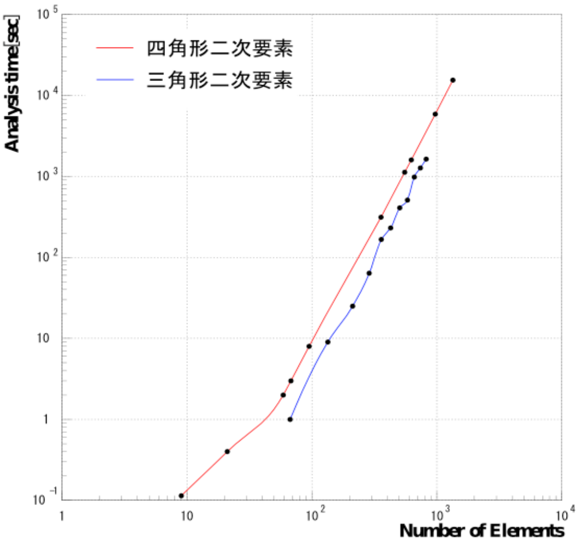

図 5: 要素数と解析時間の関係

図 5 より、要素数の増加に対してどちらの要素も同じような傾向で計算時間が増えていることが分かる。また、三角形要素に比べて四角形要素のほうが計算時間が長いことも分かる。これは要素数が同じ場合、四角形要素の節点数が三角形要素よりも多くなるからである。計算時間の大部分は共役勾配法による一般化固有値問題の数値計算にあてられる。その共役勾配法にかかる時間は要素数ではなく節点数に依存するため、節点数の多い四角形要素のほうが計算時間が長くかかった。

領域の細分化によって精度を向上させることを考える場合、現状のプログラムでは解析時間の長さが問題となる。また要素の増加により、どのように解が収束するのかを調べる必要があるため、解析時間の短縮が求められる。

4． まとめと今後の課題

本研究では周波数領域での電磁場解析プログラムを開発し、その解析精度・解析時間の検証を行った。解析したテストモデルでは、共振周波数・磁場強度の良好な一致が確認された。

しかし、要素数を増加させても精度が向上しない点も存在した。これは領域を分割した要素形状の違いが影響したと考えられる。さらなる高精度化のためには、解析するモデルに最適な要素形状で領域を分割する方法を検討する必要がある。解析した結果から要素内での誤差の大きさを推定し、誤差の大きさに応じて要素形状を変化させるアダプティブメッシュ法はその方法の 1 つに成り得るだろう [5]。

三角形要素を利用したプログラムと比較して、要素数に対する解析時間の長さは四角形要素を利用した場合のほうが長かった。これは要素数が同じ場合、四角形要素のほうが節点数が多くなるためであり、節点数が同じ場合には両者に大きな違いはなかった。解析精度に関しては三角形要素のほうが要素数が増加するに従って良くなる傾向が見られた。今後は要素数を更に増やし、両者の解への収束をより詳しく検討したい。

また、要素数が増加すると解析時間が非常に長くなるため、計算処理の並列化などによる解析時間の短縮も図る必要がある。

参考文献

[1] 坂本文人, 千蒲悠平, 佐々木信哉, 平澤秀悟, 伊藤桂一, “加速器設計のための電磁場解析手法に関する検討”, 電気・情報関係学会北海道支部連合大会 113, (2011)

[2] 小柴正則, “光・波動のための有限要素法の基礎”, 森北出版, (1990)

[3] 森正武, “数値解析 第 2 版”, 共立出版, (2002)

[4] 土木学会 応用力学委員会 計算力学小委員会, “いまさら聞けない 計算力学の常識”, 丸善出版, (2008)

[5] 横山正明, “高精度計算力学”, 朝倉書店, (1998)