

ELECTROMAGNETIC FIELD IN A BEAM TUBE PRODUCED BY A RELATIVISTIC ELECTRON PULSED BEAM PASSING THROUGH A BEAM WINDOW

H. Yamazaki^{*)}

Hokkaido Institute of Technology
Maeda 7-15 Teine-Ku Sapporo, 006-8585 JAPAN

Abstract

For monitoring beam current with a pickup loop, we obtained the electromagnetic field in a cylindrical beam tube, produced by a Gaussian pulse beam which is injected through a beam window, by the use of two computational methods. In one of the two methods, the azimuthal magnetic field was calculated from the analytic solution for a beam of step function form, derived by Mitrovich, by using Duhamel's formula. In the other method, the electric field and the azimuthal magnetic field were obtained by solving Maxwell's equations numerically. The agreement of the results for the azimuthal magnetic field by the two methods is quite well.

ビーム窓を通過する相対論的電子のパルスビームがビーム管内に作る電磁界

1. はじめに

導体円筒の中心軸に沿って走る荷電粒子ビームの電流波形を得る目的でループ型ピックアップまたはワイヤライン型ピックアップを用いる場合、第一にピックアップの場所における電磁界の波形とビーム電流波形との関係、第二にピックアップを含む観測系により得られる波形と電磁界の波形との関係が分かっている必要がある。前者は無限長一様円筒の場合は相似の関係にあるが、一様円筒境界条件を破る部分、例えば、円筒半径の不連続な変化やビーム窓等で円筒端面が導体で閉じられている部分があると、そこから過渡的な電磁界が発生し相似性が破られる。著者はこれまでに方形波およびガウス関数波形ビームの場合の磁界波形を計算し[1], [2]、先頭の主ピークの後ろに後続波が持続することを示した。本論文においては、先ず[2]と同じくガウス関数波形ビームの場合の磁界波形を Mitrovich の解析解[3]を用いて畳込み積分により求める。次いで Maxwell 方程式の数値解により電磁界波形を求め、それらが Mitrovich の解析解より求めたものと良く一致することを示す。

2. Mitrovich の解析解による方法

Mitrovich は、左端が導体板により閉じられた半無限円筒境界条件のもとで左端より中心軸に沿って階段関数波形の荷電粒子ビームが現れ、右方へ進む場合の円周方向磁界 h_θ の解析解を Green 関数を用いて導出した。この解析解は無限積分を含み、その被積分関数の収束が悪いため正確な値は求め難いが、ビーム粒子の速度が光速 c に近い場合

は困難が回避され、 h_θ は次式となる。

$$h_\theta(r, z, t) = \frac{I}{2\pi R} \left(\frac{1}{r} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(x_n r) J_0(x_n \sqrt{t^2 - z^2})}{x_n J_1^2(x_n)} \right) \quad (1)$$

ここで、 I はビーム電流値(階段関数の波高)、 R は円筒の半径、 r, z は R の単位で測った座標、 t は R/c の単位で測った時間、 x_n はベッセル関数 $J_0(x)$ のゼロ点である。式(1)は無級数を含むが、[1], [2] と同じ近似(約 100 項の和で打ち切る)を採用する。式(1)は階段関数入力に対する磁界、すなわちインディシャル応答を意味するから、任意のビーム波形 $f(t)$ の場合の磁界 H_θ は Duhamel の公式により

$$H_\theta(r, z, t) = \int_0^t f'(\tau) h_\theta(r, z, \tau) d\tau \quad (2)$$

と計算される。ここで、 $f'(t)$ は $f(t)$ の導関数である。ガウス関数波形の場合は左右の端を標準偏差 σ の 3 倍の点で切断して、

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-3\sigma)^2}{\sigma}\right) \quad 0 \leq t \leq 6\sigma \quad (3)$$

$$f(t) = 0 \quad t < 0, t > 6\sigma$$

を式(2) に用いて計算する。

3. Maxwell の方程式の数値解

左端の閉じられた軸対称円筒境界内で円柱座標 (r, z) を用い、積分形の Maxwell 方程式に対し差分 1 次近似を適用する。差分 $\Delta r, \Delta z$ の間隔で格子点を決定し、差分化された Maxwell 方程式を用い

^{*)} Present address : Nishi 7-2-15 Minami 16
Chuou-Ku Sapporo, 064-0916 JAPAN
011-512-4001, yamazaki-h@mvi.biglobe.ne.jp

て、時間差分 Δt の後の各格子点の新しい電磁界を求める。このとき、どの時点の電磁界を用いて新しい電磁界を決定するかが結果に大きく影響する。本論分では Weiland [4] にならい、 Δt の中央の時点の電磁界を用いる中間差分を採用した。これにより、差分された Maxwell 方程式は新しい電磁界に関し陽に解くことが可能となり、計算量が大幅に減少する。ただし、解が発散しない条件を満足するために、

$$\Delta t = \Delta z / (2c), \quad \Delta r = \Delta z$$

とした。数値計算においては $\Delta z = R/50$ (R は円筒の半径) とし、式(3) に式(1) の I を乗じた電流パルスが光速 c で中心軸上を右に進むものとする。計算は、標準偏差 $\sigma = 0.5R/c$ の場合につき $t=0$ から $t=20R/c$ までの 2000 ステップを実行した。

4. 計算結果

図 1 に、式(1) の円周方向磁界を $r=0.5R, z=3R$ の点につき計算した結果を示す。 $t=3R/c$ から $t=20R/c$ までの 850 点につき Mathematica により計算した。式(3) のガウス関数において $\sigma=0.5R/c$

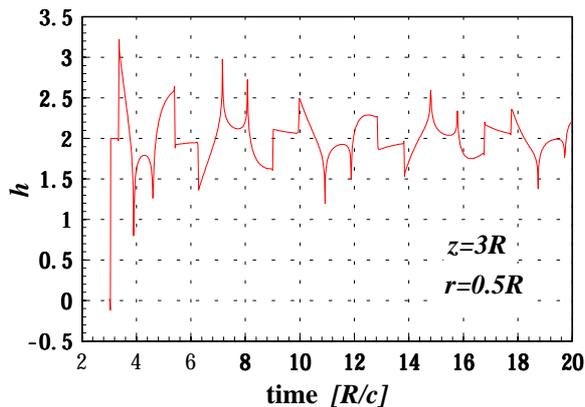


図 1 階段関数ビームの円周方向磁界
観測点: $r=0.5R, z=3R$ R は円筒半径
縦軸の単位は $I/(2R)$

としたものを式(2) に用いて計算した結果を図 2 の (a) に示す。図 2 (b) に、Maxwell 方程式の数値解より $r=0.5R, z=3R$ の点における円周方向磁界を時間の関数としてプロットした結果を示す。図から明らかなように、両者の一致は非常に良い。主ピークの高さは 0.5% 以内で、次ぎのピークは 2% 程度の差で一致している。Mitrovich の解析解による場合は無限級数の近似計算における誤差、Maxwell 方程式の数値解による場合は多数の計算ステップによる誤差の集積等、評価の容易でない誤差を含む。両計算結果の良好な一致は本論分で行

った計算処理の妥当性を示し、計算結果の信頼性を高めるものである。Maxwell 方程式の数値解のデータを用いてグラフ内に示された観測点 (r, z) における円周方向磁界および軸方向電界と半径方向電界を時間の関数としてプロットした結果を図 3 および図 4 と図 5 に示す。

Mitrovich

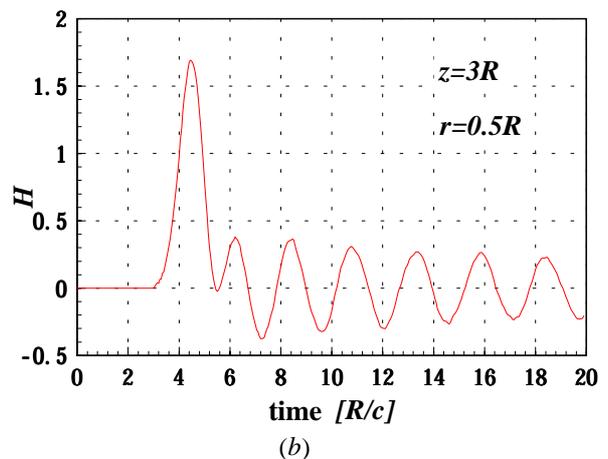
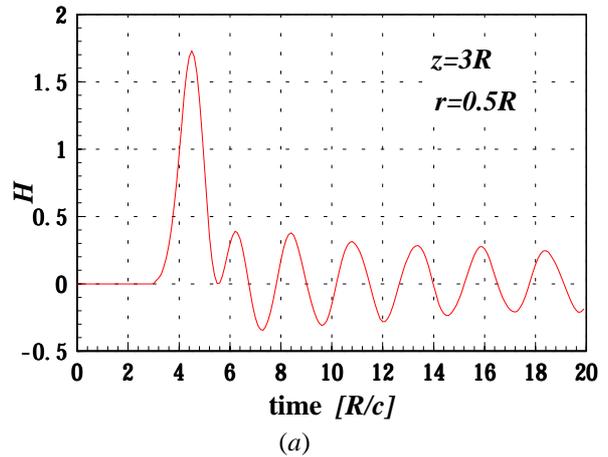


図 2 ガウスビーム ($\sigma=0.5R/c$) の円周方向磁界
観測点: 枠内に表示 R は円筒半径
縦軸の単位は $I/(2R)$
(a) Mitrovich の解析解による
(b) Maxwell 方程式の数値解

参考文献

- [1] H. Yamazaki et al., Proceedings of the 24th Linear Accelerator Meeting in Japan, Sapporo July 1999.
- [2] 杉野、山崎 日本原子力学会北海道支部第 17 回 研究発表会要旨集、札幌 1999 年 12 月
- [3] D. Mitrovich, Sci. Instrum. **59** (1988) 1139.
- [4] T. Weiland, CERN/ISR-TH/80-07 (1980).

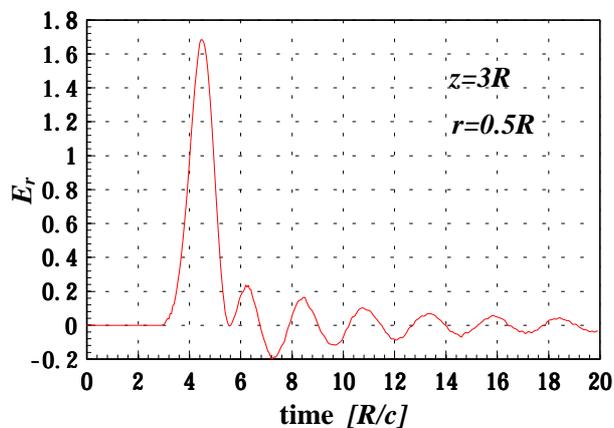
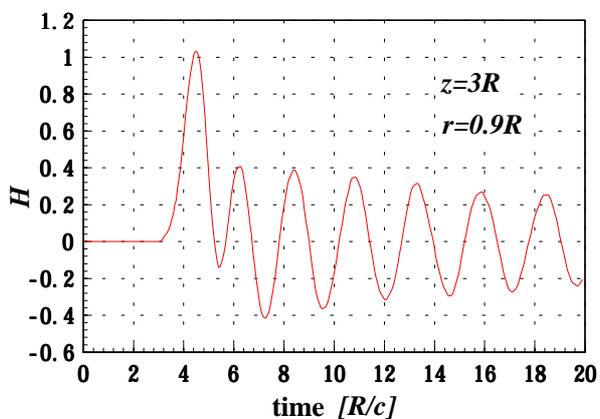
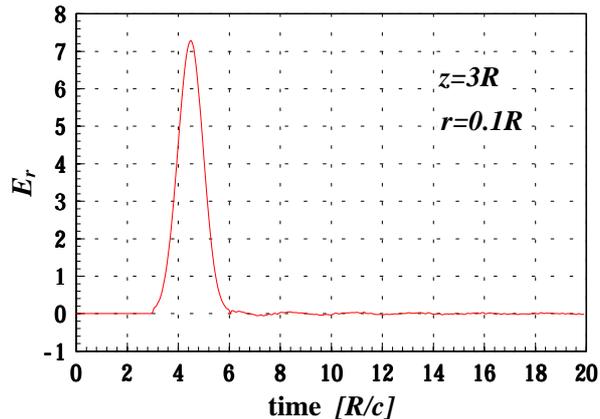
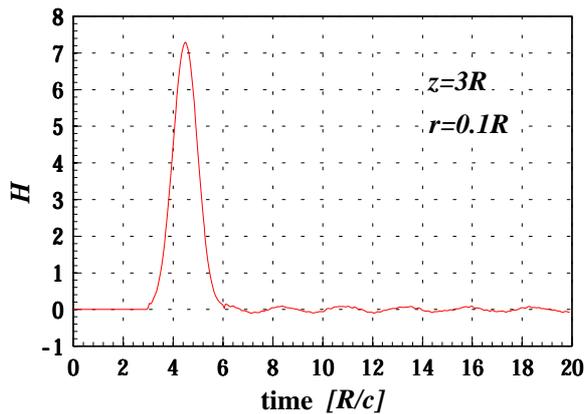


図3 ガウスビーム($\sigma = 0.5R/c$) の円周方向磁界
縦軸の単位は $I/(2R)$

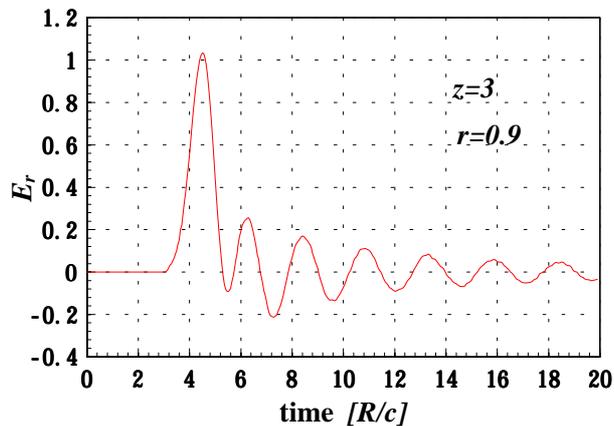
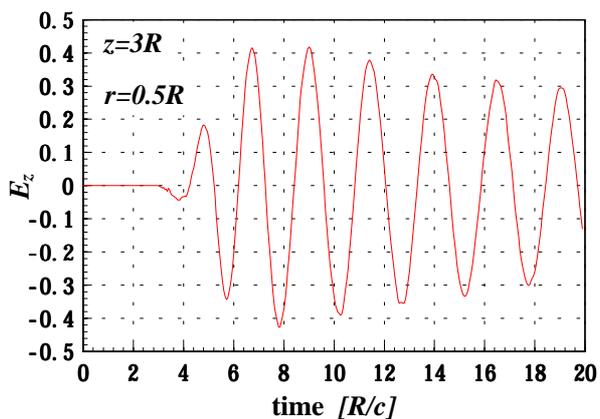


図5 ガウスビーム($\sigma = 0.5R/c$) の径方向電界
縦軸の単位は $c\mu_0 I/(2\pi R)$

図4 ガウスビーム($\sigma = 0.5R/c$) の軸方向電界
縦軸の単位は $c\mu_0 I/(2\pi R)$

